

### Algebra und Zahlentheorie.

**Varopoulos, Th.:** Sur un problème de M. Maltézos. Prakt. Akad. Athénōn 8, 122 bis 126 u. franz. Zusammenfassung 126—127 (1933) [Griechisch].

Es werden sämtliche  $n$ -reihigen Determinanten bestimmt, deren Elemente Polynome in einer Unbestimmten  $x$  sind und deren Wert von  $x$  unabhängig ist.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Tôya, Tikara:** Some remarks on Montel's paper concerning upper limit of absolute values of roots of algebraic equations. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 1, 275 bis 282 (1933).

Verf. beweist folgende von P. Montel [C. R. Acad. Sci., Paris 193, (1931); dies. Zbl. 3, 157] ohne Beweis ausgesprochene Sätze: A. Ist  $\alpha$  eine Wurzel der Gleichung  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ , so gilt  $|\alpha| \leq L$ , wobei

$$L = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n|$$

ist. — Dieser Satz enthält als Spezialfall den bekannten Kakeyaschen Satz. Der Beweis verläuft durch geringe Modifikationen des Kakeyaschen Beweises. — Ist dabei  $L > 1$ , so gilt stets  $|\alpha| < L$ . Ist aber  $L = 1$ , und ist

$$1 = a_1 = \dots = a_{\nu_1-1} > a_{\nu_1} = \dots = a_{\nu_2-1} > a_{\nu_2} = \dots = a_{\nu_k-1} > a_{\nu_k} = \dots = a_n > 0,$$

so gilt  $|\alpha| = 1$  nur im Falle  $\alpha = e^{\frac{2\pi i l}{g}}$ , wobei  $g = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, n+1)$  ist. Das folgt aber unmittelbar aus einem Satze von Hurwitz [Tôhoku Math. J. 4, 89—93 (1913 bis 1914); Rohrbach, Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42, 77—78 (1932)]. — B. Ist  $\alpha$  eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \text{ so gilt } |\alpha| < \left[1 + R^{\frac{m}{m-1}}\right]^{\frac{m-1}{m}},$$

wobei  $R^m = |a_1|^m + |a_2|^m + \dots + |a_n|^m$ ,  $m > 1$  ist. *N. Tschebotarow* (Kasan).

**Pascal, Ernesto:** Una breve osservazione sul metodo per la ricerca del limite superiore delle radici reali di un'equazione. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 71, 87—88 (1933).

**Berwald, L.:** Über die Lage der Nullstellen von Linearkombinationen eines Polynoms und seiner Ableitungen in bezug auf einen Punkt. Tôhoku Math. J. 37, 52—68 (1933).

Unter der ersten Ableitung  $f_1(z, \alpha)$  eines Polynoms  $f(z)$   $n$ -ten Grades in bezug auf einen Punkt  $\alpha$  versteht man das Polynom  $(n-1)$ -ten Grades  $f_1(z, \alpha) = n f(z) - (z - \alpha) f'(z)$ . Die  $(k+1)$ -te Ableitung von  $f(z)$  in bezug auf den Punkt  $\alpha$  ist das Polynom  $f_{k+1}(z, \alpha) = (n-k) f_k(z, \alpha) - (z - \alpha) f'_k(z, \alpha)$ . Es wird eine Reihe von Sätzen über die Lage der Nullstellen der linearen Kombinationen des Polynoms  $f(z)$  und seiner gewöhnlichen Ableitungen auf die Ableitungen des Polynoms in bezug auf einen Punkt verallgemeinert. Das Hauptproblem der Arbeit ist das folgende: Was läßt sich über die Lage der Nullstellen der Polynome

$$A_0 f(z) + A_1 f'(z) + \dots + A_p f^{(p)}(z) \quad \text{und} \quad A_0 f(z) + A_1 f_1(z, \alpha) + \dots + A_p f_p(z, \alpha)$$

aussagen, wenn man die Lage der Nullstellen der Polynome  $f(z)$  und

$$F(z) = A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \dots + A_p$$

kennt?

*Sz. Nagy* (Szeged).

**Ricci, Giovanni:** Sull' aritmetica dei polinomi in  $\alpha^x$  ( $\alpha, x$  interi) a coefficienti interi. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 222—228 (1933).

Detto  $P_x$  il massimo divisore primo del prodotto  $F(a) \cdot F(a^2) \cdot \dots \cdot F(a^x)$  ( $F$  polinomio di grado  $n \geq 1$ , irriducibile a coefficienti interi,  $a$  e  $x$  interi,  $|a| \geq 2$ ) si dimostra che è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log x}{P_x} \leq 2(n+1).$$

*Autoreferat.*

**Bell, E. T.: Recurrent commutative vectors.** Tôhoku Math. J. 37, 39—51 (1933).

Ist  $P(\vartheta) = k_0 \vartheta^n + k_1 \vartheta^{n-1} + \dots + k_n [k_0 = 1]$  ein Polynom in einer Unbestimmten  $\vartheta$ , so lassen die Restklassen modulo  $P(\vartheta)$  sich eindeutig durch Ausdrücke  $x_0 + x_1 \vartheta + \dots + x_{n-1} \vartheta^{n-1}$  oder durch Vektoren  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  repräsentieren. Der Addition und Multiplikation der Restklassen entsprechen die Vektoraddition und eine vektorielle Multiplikation, welche den Vektorraum zu einem kommutativen (dem Restklassenring isomorphen) hyperkomplexen System macht. Den Potenzen  $1, \vartheta, \dots, \vartheta^{n-1}$  entsprechen dabei die Einheitsvektoren  $\delta^0, \delta^1, \dots, \delta^{n-1}$ . Die weiteren Potenzen von  $\delta = \delta^1$  werden durch die Rekursionsformel

$$k_0 \delta^{r+n} + k_1 \delta^{r+n-1} + \dots + k_n \delta^r = 0 \quad (1)$$

definiert, deren Lösung die Gestalt

$$\delta^r = C_0(r) \delta^0 + \dots + C_{n-1}(r) \delta^{n-1}$$

hat. Die Potenzen  $x^r$  eines beliebigen Vektors  $x$  genügen einer ähnlichen Rekursionsformel, wobei an Stelle von  $k_0, \dots, k_n$  die Koeffizienten der charakteristischen Funktion von  $x$  treten. — Für die Differentiation eines Vektors nach einem Skalar gelten die üblichen Regeln:  $(\alpha u)' = \alpha u'$ ;  $(u + v)' = u' + v'$ ;  $(uv)' = u'v + uv'$ . Daraus

$$\partial x^j / \partial x_j = r x^{r-1} \delta^j, \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

Daraus und aus (1) folgt ein System von Differentialgleichungen für die Potenzen  $x^r$  von der Form

$$\sum_{j=0}^{n-1} k_j D_0^{s_{0j}} D_1^{s_{1j}} \dots D_{n-1}^{s_{n-1j}} x^r = 0.$$

Analytische Funktionen von Vektoren werden als Potenzreihen  $\sum \alpha_r x^r$  definiert; sie haben dieselben Eigenschaften wie analytische Funktionen von Zahlen oder von Matrices.

van der Waerden (Leipzig).

**Spampinato, Nicolò: Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad  $n$  unità dotata di modulo.** Rend. Circ. mat. Palermo 57, 235—272 (1933).

Part I concerns functions of one variable in a linear associative algebra  $A$  of order  $n$  over the complex field. Absolute value being defined in a natural manner, it is shown that  $|xy| \leq \alpha |x| \cdot |y|$  where  $\alpha$  is a real number fixed for  $A$ . The ordinary notions of continuity, boundedness, oscillation and limited variation carry over. The power series  $P_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  is convergent for an element  $z$  of  $A$  if the maximum absolute value  $|z|$  of its coordinates is  $< 1/\alpha R$  where  $R = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{a}_m|}$ .

Application is made to power series in a complex total matrix algebra when the coefficients are (a) matrices, (b) scalars. — In Part II,  $A$  has a modulus  $u$ . A necessary and sufficient condition that the power series  $P_0(z)$  converge for the matrix  $z$  is that it converge at the points  $\alpha_1 u, \dots, \alpha_e u$  where  $\alpha_1, \dots, \alpha_e$  are the roots of the minimum equation of  $z$ . An explicit form for  $P_0(z)$  is given as a polynomial of degree  $\leq e-1$  in  $z$  with coefficients depending upon the  $a_m$  and the characteristic roots of  $z$ . These results are shown to agree with those of Cipolla [Rend. Circ. mat. Palermo 56, 144 to 154 (1932); this Zbl. 4, 338] on functions of matrices. MacDuffee (Columbus).

**Bohlin, K.: Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré réduite à la forme libre.** Ann. Mat. pura appl., IV. s. 12, 135—144 (1933).

Verf. nimmt als Ausgangspunkt folgende einparametrische kanonische Form einer Gleichung fünften Grades:  $\eta^5 + \frac{5}{u^3} \cdot \eta = \frac{1}{u^5} - 27$ , die von ihm „freie Form“ (forme libre) genannt wurde. Nachdem er früher [K. Bohlin, Sur une équation algébrique remarquable se trouvant en rapport à la mécanique céleste, Astr. iakktag. och unders. Stockholms Observ. 8, Nr 7, 1—111 (1908)] die Wichtigkeit für ihre Lösung, der sog. „beschränkten Funktionen“ (= funktionalen Einheiten), nachgewiesen hat, untersucht er hier die Potenzreihenentwicklung von  $\eta$  in der Umgebung von  $u = 0$ , indem er eine



durch die Gleichung  $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0$  definierte beschränkte Funktion  $\alpha$  als Hilfsparameter nimmt. Die zur Lösung notwendigen Formeln lauten:

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0, \quad \beta = \alpha + \alpha^2, \quad \gamma = \frac{\beta}{3}, \quad \delta = \frac{\alpha}{3}, \quad p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4,$$

$$s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4, \quad A_0^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6,$$

$$A_0^5 = A_1^5 [1 + 66\delta^5 A_1^5 + 66\delta^{10} \cdot (A_1^5)^2 + \delta^{15} (A_1^5)^3],$$

$$\eta = -\frac{s^5}{u^5} + \frac{1}{u} A - \frac{A^2}{p} - u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1-s) - u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1-s).$$

N. Tschebotaröw (Kasan).

**Turkin, W. K.: Auflösbarkeit der Gruppen der ungeraden Ordnung  $p^\alpha q r$ .** Rec. math. Moscou 40, 229–235 u. dtsh. Zusammenfassung 235 (1933) [Russisch].

Ein neuer Beitrag zur Kenntnis der Ordnungstypen von Gruppen, die sicher auflösbar sind. Es waren bis jetzt folgende Ordnungstypen dieser Art bekannt:

$$pqr, p^2qr, p^2q^2r^2, p^3qr, p^3q^2r, p^3q^2r^2, p^3q^3r, p^4qr, p^4q^2r, p^5qr,$$

wobei  $p, q, r$  Primzahlen sind. — Es genügt zu beweisen, daß eine Gruppe mit einer Ordnungszahl dieser Art nicht einfach sein kann. Es ist dabei wesentlich, daß die Primzahlen  $p, q, r$  ungerade sind (ist dagegen  $p = 2$ , so gibt es einfache Gruppen von den Ordnungen  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ , welche diesem Typ zukommen). Als Endziel dieser Untersuchungen erbringt Verf. den Nachweis der Vermutung, daß alle Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind. — Der Beweis stützt sich auf den folgenden Satz von Burnside: Alle transitiven Gruppen, deren Grade Primzahlen sind, sind entweder auflösbar oder zweifach transitiv (d. h. von geraden Ordnungen) — und ist übrigens elementar. Sein Schwerpunkt besteht im Nachweis folgender Behauptung: Gruppen  $\mathfrak{G}$  von der Ordnung  $p^\alpha q r$ , die  $s [(s, p) = 1]$  Sylowgruppen von der Ordnung  $p^\alpha$  enthalten, deren Zentren vertauschbar sind und zyklisch ineinander mittels einer Transformation von  $\mathfrak{G}$  übergehen, können nicht einfach sein. N. Tschebotaröw (Kasan).

**Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order.** Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 29–95 (1933).

Die Struktur der Gruppen  $G$  von Primzahlpotenzordnung  $p^n$  wird eingehend untersucht; u. a. werden viele bekannte Sätze verallgemeinert oder ihre Beweise vereinfacht. Die große Fülle der Einzelresultate kann hier nicht vollständig wiedergegeben werden. Die Beweise benutzen einheitliche neu entwickelte Methoden, übrigens ohne Verwendung von Darstellungstheorie. —  $P$  und  $Q$  seien Elemente aus  $G$ .  $PQ P^{-1}Q^{-1}$  heiße  $(P, Q)$ . Durchlaufen  $P$  und  $Q$  die Elemente der Untergruppen  $H$  bzw.  $K$  von  $G$ , so heiße die von allen so erhaltenen  $(P, Q)$  erzeugte Gruppe  $(H, K)$ . Die Gruppen  $\theta_i(G)$  mit  $\theta_0 = G$ ,  $\theta_i = (\theta_{i-1}, \theta_{i-1})$  [Ableitungen von  $G$ ] und  $H_i(G)$  mit  $H_1 = G$ ,  $H_i = (G, H_{i-1})$  [“lower central series”], ferner die Gruppen  $Z_i$  mit  $Z_0 = \text{Zentrum von } G$ ,  $Z_i/Z_{i-1} = \text{Zentrum von } G/Z_{i-1}$ , und die von den  $p^\alpha$ -ten Potenzen aller Elemente erzeugten Untergruppen  $\mathcal{O}_\alpha(G)$  sowie die von den Elementen einer Ordnung  $\leq p^\alpha$  erzeugten Gruppen  $\mathcal{Q}_\alpha(G)$  sind charakteristisch. Die Reihen der  $\theta_i$  und  $H_i$  schließen mit dem Einheits-element  $E$ ; es möge dies nach genau  $\delta + 1$  bzw.  $c + 1$  Schritten der Fall sein. Es gilt dann u. a.  $\theta_i \leq H_{2^i}$  (das Gleichheitszeichen kann für beliebig großes  $c$  zutreffen),  $n \geq 2^\delta + \delta$ ,  $(H_i, H_j) \leq H_{i+j}$ ,  $(\theta_i, Z_{\delta i}) = E$ . — Es wird ein Kalkül mit Kommutatoren entwickelt, insbesondere eine an sich interessante Entwicklung von  $(PQ)^\alpha$  nach Kommutatoren von steigender Ordnung (Verf. schreibt „Gewicht“ [weight]) von  $P$  und  $Q$ . Nach Burnside wird  $G$  von den Repräsentanten der Basisklassen der größten abelschen Faktorgruppe vom Typ  $(p, \dots, p)$  erzeugt. Ist deren Anzahl  $d$ , so ist die Anzahl der Automorphismen von  $G$  Teiler von  $p^{d(n-d)}(p^d - 1)(p^d - p) \dots (p^d - p^{d-1})$ . — Sätze von Kulakoff [Math. Ann. 104 (1931); dies. Zbl. 1, 386] und Miller [Proc. London Math. Soc. II. s. 2 (1904)] über die Anzahlen gewisser Untergruppen werden neu bewiesen und zum Teil verschärft. — Besonders eingehend werden die sog. „regu-



lären“ Gruppen behandelt, zu denen alle mit  $n \leq p$  oder  $c < p$  gehören, und für die u. a.  $\mathcal{G}_\alpha(\mathcal{G}_\beta) = \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$ ,  $H_\beta(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{G}_{\alpha\beta}(H_\beta)$ ;  $\theta_\beta(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{G}_{\alpha 2^\beta}(\theta_\beta)$ ;  $(\mathcal{G}_\alpha, \Omega_\alpha) = E$  gilt, und ein System von Erzeugenden mit bemerkenswerten (Basis-) Eigenschaften aufgestellt wird.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Waerden, B. L. van der: Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen. Math. Z. 37, 446—462 (1933).

Weyl hat in seiner allgemeinen Theorie der halbeinfachen Lieschen Gruppen besonders auf die geometrische Natur der auftretenden algebraischen Probleme hingewiesen. Wie Schouten in einer hektographierten Vorlesung skizziert hat, bahnt die Weylsche Darstellung den Weg zu der Klassifikation der halbeinfachen Gruppen mittels einer geometrischen Methode. Die vollständige Ausführung dieser Idee bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Verglichen mit der ursprünglichen rein algebraischen Methode von Cartan erweist sich diese neue Methode viel übersichtlicher; im Speziellen reihen sich die 5 bekannten Ausnahmegruppen in dem ganzen Aufbau in natürlicher Weise ein, was die Cartansche Methode wohl nicht erkennen ließ. — Nach der vorliegenden Methode erweist sich die Klassifikation der halbeinfachen Gruppen als äquivalent zu dem folgenden geometrischen Problem: Alle Systeme  $\Sigma$  endlichvieler Vektoren eines euklidischen Raumes  $E_n$  zu bestimmen, welche den folgenden Bedingungen genügen: 1. Mit dem Vektor  $a$  enthält  $\Sigma$  auch den Vektor  $-a$ , sonst aber keine andere Vielfache  $k \cdot a$ . 2. Gehören  $a$  und  $b$  dem System  $\Sigma$  an, so soll  $2(a, b)/(a, a)$  eine ganze Zahl sein. (Dabei bedeutet  $(a, b)$  das skalare Produkt der zwei Vektoren  $a$  und  $b$ ). 3. Mit  $a$  und  $b$  enthält  $\Sigma$  auch die Vektoren  $b - k \cdot a$ , wo die ganze Zahl  $k$  von 0 bis  $2(a, b)/(a, a)$  läuft. — Entnehmen wir aus einem solchen System  $\Sigma$  alle Vektoren, welche einem gewissen linearen Unterraum angehören, so bilden diese wieder ein System  $\Sigma$ . Man erhält deshalb alle in  $E_{n+1}$  möglichen Systeme aus den in  $E_n$  möglichen durch Erweiterung derselben. Diese Erweiterungen werden in den einzelnen Fällen induktiv verfolgt.

F. Bohnenblust (Princeton).

Menger: Zur Begründung einer Theorie der Bogenlänge in Gruppen. Erg. math. Kolloqu. H. 5, 1—6 (1933).

In sinngemäßer Erweiterung der von Menger für Gruppenelemente gegebenen Abstandsdefinition [vgl. Math. Z. 33, 396 (1931); dies. Zbl. 1, 55] wird für Bogen einer kommutativen  $L$ -Gruppe (im Sinne von O. Schreier) eine Bogenlänge definiert, die wieder eine Menge von Elementen dieser Gruppe ist; diese ist kongruenzinvariant, halbstetig und (wenigstens wenn die Länge eines jeden Bogens die Gruppeneins enthält) monoton und umfaßt die von dem Bogen erzeugte Untergruppe. — Schließlich wird für Vektorräume, insbesondere die Ebene, eine Charakterisierung der als „Längen“ auftretenden Mengen gegeben.

Reinhold Baer (Manchester).

MacDuffee, C. C.: Matrices with elements in a principal ideal ring. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 564—584 (1933).

Systematische Zusammenfassung aller bisher bekannten Sätze über Matrizes mit Elementen aus einem Hauptidealring, insbesondere also über ganzzahlige Matrizes und  $\lambda$ -Matrizes (mit Elementen aus einem Polynombereich). Die Beweise werden alle auf eine Form gebracht, in der sie für beliebige Hauptidealringe gültig sind. Die Hauptsätze lauten: 1. Sind  $a_1, \dots, a_n$  Elemente des Hauptidealringes  $\mathfrak{P}$  und ist  $d$  ihr G. G. T., so gibt es eine Matrix mit Determinante  $d$ , in der  $a_1, \dots, a_n$  die erste Zeile bilden. 2. Jede Matrix  $A$  kann durch Linksmultiplikation mit einer unimodularen Matrix  $U$  auf eine Normalform gebracht werden, in der oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen, wobei die Diagonalelemente bis auf Einheiten und die Elemente unter ihnen modulo den Diagonalelementen eindeutig bestimmt sind. 3. Jedes Paar von Matrizes  $A, B$  hat einen linksseitigen G. G. T. in der Form  $PA + QB$ . 4. Jede Matrix  $A$  vom Range  $\rho$  ist äquivalent einer Diagonalmatrix  $UAV$ , deren von Null verschiedene Diagonalelemente  $h_1, \dots, h_\rho$  der Bedingung  $h_i/h_{i+1}$  genügen. 5. Jede schiefsymmetrische Matrix  $Q$  hat einen geraden Rang  $2\mu$  und ist kongruent einer Normal-



form  $U^T Q U$ , bestehend aus  $\mu$  zweireihigen schiefssymmetrischen Kästchen. Es folgen Anwendungen auf Moduln und Ideale, speziell auf die Konstruktion von Minimalbasen.  
*van der Waerden (Leipzig).*

**Kořinek, Vladimír: Maximale kommutative Körper in einfachen Systemen von hyperkomplexen Zahlen.** Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême 1932, Nr 1, 1—24 (1933).

Es sei ein einfaches hyperkomplexes System vom Rang  $n^2$  über seinem Zentrum  $Z$ , einem algebraischen Zahlkörper. Die folgenden Sätze gelten nur unter der Voraussetzung, daß jedes Primideal  $\mathfrak{p}_z$  des Zentrums, das die reduzierte Diskriminante von  $\mathfrak{S}$  teilt,  $n$ -te Potenz eines Primideals  $\mathfrak{P}$  einer Maximalordnung (M.-O.)  $I$  in  $\mathfrak{S}$  ist. Zu jedem maximalen kommutativen Teilkörper von  $\mathfrak{S}$  gibt es unendlich viele zu  $K$  über  $Z$  isomorphe Körper  $K'$  in  $\mathfrak{S}$ . Um endliche Anzahlen zu erhalten, geht Verf. so vor: Die M.-O.  $\mathfrak{o}$  von  $K$  sei in der M.-O.  $I$  von  $\mathfrak{S}$  enthalten. Unter einer Schar mit  $K$  isomorpher Körper in  $I$  versteht man die Menge sämtlicher mit  $K$  isomorphen Körper  $K'$ , deren M.-O. in der festen M.-O.  $I$  von  $\mathfrak{S}$  liegen und die aus einem von ihnen durch einen Automorphismus von  $\mathfrak{S}$  über  $Z$  entstehen, der  $I$  (nicht elementweise!) in sich überführt. Die Anzahl dieser Scharen ist endlich. Es sei  $\omega_S$  die Anzahl der Automorphismen über  $Z$  von  $I$  in sich, die einen Körper der Schar  $S$  in sich überführen ( $\omega_S$  ist für alle Körper der Schar gleich). Dann bezeichnet man als das Maß  $M_I$  der Scharen mit  $K$  isomorpher Körper in  $I$  die Zahl  $\sum_S \omega_S$ . Diese Zahl hängt mit der Klassenzahl von  $K$  zusammen:

Es sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal in der M.-O.  $\mathfrak{o}$ . Alle Ideale  $\mathfrak{e} \mathfrak{a} x$ ,  $x$  irgendein Element  $\neq 0$  aus  $K$ ,  $\mathfrak{e}$  irgendein Ideal in  $\mathfrak{o}$ , das in  $I$  ein zweiseitiges Ideal erzeugt, mögen eine Idealklasse bilden (man erhält so eine Faktorgruppe der absoluten Idealklassengruppe).  $M_I$  ist gleich  $1/r$  mal der Anzahl der Idealklassen in  $\mathfrak{o}$ , deren Ideale in  $I$  Linksideale erzeugen mit einer Rechtsordnung  $I'$  vom selben Typus wie  $I$ , d. h.  $I' = \xi^{-1} I \xi$ ,  $\xi$  aus  $\mathfrak{S}$ ;  $r$  ist die Anzahl der Automorphismen von  $K$ . Es gibt nur endlich viele Typen von M.-O. in  $\mathfrak{S}$ ,  $I_1, \dots, I_s$  seien Repräsentanten. Die Summe über die Maße der Scharen mit  $K$  isomorpher Körper in  $I_1, \dots, I_s$  heiße das Maß der Scharen mit  $K$  isomorpher Körper in  $\mathfrak{S}$ . Dieses Maß ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten  $I_1, \dots, I_s$ . Es ist gleich  $1/r$  mal der Ordnung der oben definierten Idealklassengruppe. *Köthe.*

**Kořinek, Vladimír: Une remarque concernant l'arithmétique des nombres hypercomplexes.** Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême 1932, Nr 4, 1—7 u. franz. Zusammenfassung 7—8 (1933) [Tschechisch].

Der Verf. vereinfacht einige Beweise aus E. Artin, Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5, 261—289 (1927). Bei der Ableitung der Theorie der einseitigen Ideale benutzt Artin l. c. die Differente und den Satz über die Norm eines eigentlichen Idealproduktes. Die vorliegende Bemerkung zeigt, daß man bei der Ableitung der Theorie der einseitigen Ideale die Differente und den Normensatz entbehren kann.

*K. Rychlík (Prag).*

**Reeg, Friedrich: Über spezielle algebraische Gleichungen im Gebiet der Quaternionen.** Jena: Diss. 1933. 63 S.

Es werden zunächst die linearen Quaternionengleichungen behandelt und die bekannten Lösungsmethoden von Schrutka, Hamilton und Tait sowie die Verfahren der Elimination und der Aufspaltung in ein System von linearen Gleichungen wiedergegeben und erweitert. Sodann befaßt sich Verf. mit den höheren Quaternionengleichungen. Er führt die bekannten Lösungsverfahren an und stellt einige Sätze von Hamilton über die Anzahl der Lösungen von Gleichungen 2-ten, 3-ten und allgemein  $n$ -ten Grades richtig. Es wird nämlich gezeigt, daß diese Quaternionengleichungen unter gewissen Voraussetzungen unendlich viele Lösungen im Gebiete der reellen Quaternionen besitzen können, Möglichkeiten, die Hamilton übersehen hat. Den Abschluß bilden Untersuchungen der binomischen Quaternionengleichungen  $x^n = a$ , und zwar werden speziell die Gleichungen 2-ten bis 7-ten Grades und anschließend allgemein die binomischen Gleichungen  $n$ -ten Grades untersucht. Es zeigt sich, daß



die Gleichung  $x^n = a$  mit  $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  unter der Voraussetzung  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$  für gerades  $n$   $\frac{n^2}{2}$  und für ungerades  $n$   $n^2$  Lösungen besitzt. Ist dagegen  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , so hat die Gleichung  $x^n = a_0$  ( $a_0 = \text{reell}$ ) stets unendlich viele Quaternionenlösungen.

Wegner (Darmstadt).

**Tsen, Chungtze C.:** Divisionsalgebren über Funktionenkörpern. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr 44, II, Nr 48, 335—339 (1933).

Verf. beweist folgenden Satz:  $\Omega$  sei ein algebraisch-abgeschlossener Körper,  $\Omega(x)$  der Körper aller rationalen Funktionen von  $x$  in  $\Omega$ ,  $k$  eine endliche algebraische Erweiterung über  $\Omega(x)$ . Dann gibt es über  $k$  als Zentrum keine wirkliche Divisionsalgebra. — Hingegen gibt es über  $K = \Omega(x_1, \dots, x_n)$  bei  $n \geq 2$  und beliebigem, nicht notwendig algebraisch-abgeschlossenem  $\Omega$  stets endliche Schiefkörper. Eine Zusatzüberlegung von W. Wichmann zeigt, daß es im Fall der Funktionenkörper einer Unbestimmten bei reell-abgeschlossenem  $\Omega$  an Schiefkörpern über  $k$  nur  $k$  und die verallgemeinerten Quaternionenalgebren vom Index 2 gibt. — Die Methode des Beweises, der nach indirekten Mitteilungen an den Ref. inzwischen von Artin wesentlich vereinfacht wurde, stützt sich auf einen bekannten Satz über die notwendige und hinreichende Bedingung für das schlechthinige Zerfallen jeder zyklischen Algebra über  $k$  bei zyklischem Zerfällungskörper  $\mathcal{B}$ ; er wird durch eine Betrachtung über die Lösbarkeit einer bestimmten Normgleichung  $\alpha = N(\xi)$  für das vorliegende Problem anwendbar gemacht, wonach die eigentliche Behauptung nach einer bekannten Schlußweise aus der Theorie der zerfallenden Algebren rasch gewonnen wird.

Grell (Jena).

**Jung, Heinrich W. E.:** Das arithmetische Geschlecht. Math. Z. 37, 342—355 (1933).

Auf Grund einer in des Verf. arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen gegebenen allgemeinen Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante berechnet Verf. für diese Zahl einen Ausdruck, der aus einfach zu übersehenden Charakteren der Verzweigungskurven und der Punktprimteiler, sowie gewissen, die Verzweigung beschreibenden Zahlen zusammengesetzt ist. Durch Vergleich dieser Formel mit einem anderen, von Kähler berechneten Ausdruck für die Euler-Poincarésche Charakteristik der Riemannschen Mannigfaltigkeit des Körpers, gewinnt Verf. nach einer auf die Punktprimteiler bezüglichen Korrektur der Kählerschen Formel einen neuen Beweis für den Satz von Alexander über den Zusammenhang der Euler-Poincaréschen Charakteristik mit der Zeuthen-Segreschen Invariante. Da die Summe: Grad der kanonischen Klasse + Zeuthen-Segresche Invariante gleich  $12 p_a + 8$  ist und die erstere Zahl leicht ausgewertet werden kann, wird auch für das arithmetische Geschlecht  $p_a$  ein expliziter Ausdruck gewonnen.

Kähler (Königsberg i. Pr.).

**Herbrand J., Jacques:** Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. II. Extensions algébriques de degré infini. Math. Ann. 108, 699—717 (1933).

In diesem zweiten Teil der Arbeit des Verf. (I. siehe dies. Zbl. 4, 244) werden die unendlichen Erweiterungen beliebiger (endlicher oder unendlicher) Zahlkörper untersucht. Eine unendliche Erweiterung  $K$  von  $k$  wird als Limes einer Folge von über  $k$  endlichen Körpern  $K_n$  dargestellt ( $K_{n+1} \supset K_n$ ). Für die Definition von Relativgrad  $f$  und Relativexponent  $e$  eines  $K$ -Primideals  $\mathfrak{P}$  in Beziehung auf  $k$  wird auf die in I. gegebene Definition für endliche  $K/k$  zurückgegriffen:  $f$  und  $e$  für  $K$  sind die Grenzwerte der entsprechenden Zahlen für die  $K_n$  im Sinne der Steinitzschen  $G$ -Zahlen. Die Regeln über das Zusammensetzen der Relativgrade und Relativexponenten bei aufeinanderfolgenden Erweiterungen sind die gleichen wie für endliche Erweiterungen. Für das Studium der normalen unendlichen Erweiterungen wird die Krullsche Theorie der unendlichen Galoiskörper herangezogen [Math. Ann. 100, 687 (1928)]. Die auf die gewöhnliche Weise definierte Zerlegungs- (Trägheits-) Gruppe eines  $K$ -Primideals  $\mathfrak{P}$  ist der Grenzwert (im Sinne der von Krull eingeführten Metrik) der entsprechenden Gruppen für die durch  $\mathfrak{P}$  teilbaren Primideale der  $K_n$ . Die bekannten Sätze über Zerlegungs- und Trägheitsgruppe gelten in gehöriger Fassung (idealzyklische Gruppen statt zyklischer



Gruppen) auch für die unendlichen Erweiterungen. Eine eigentümliche Schwierigkeit ergibt sich bei den Verzweigungsgruppen: Definiert man sie in der gewöhnlichen Weise als Invariantengruppen von Restklassen nach Primäridealen, so zeigt sich, daß alle Verzweigungsgruppen eines Primideals  $= 1$  sein können, während dies für die entsprechenden Gruppen der Zwischenkörper  $K_n$  nicht gilt. Deshalb werden „Grenzverzweigungsgruppen“ als (Krullsche) Grenzwerte von Folgen von Verzweigungsgruppen der  $K_n$  eingeführt. Für diese gelten viele Sätze der gewöhnlichen Verzweigungstheorie.

Deuring (Leipzig).

**Noether, Emmy: Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper.** Math. Ann. 108, 411—419 (1933).

Der Normensatz der Klassenkörpertheorie: Eine Zahl  $a$  eines Körpers  $k$  ist dann und nur dann Norm aus einem relativzyklischen Erweiterungskörper  $K$ , wenn  $a$  Norm ist aus jeder  $p$ -adischen Erweiterung  $K_p = k_p K$ , hat sich als Spezialfall des Satzes herausgestellt, daß eine Algebra  $\mathfrak{A}$  über einem Zahlkörper  $k$  dann und nur dann volle Matrixalgebra ist, wenn dies für jede  $p$ -adische Erweiterung  $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A} k_p$  gilt. Dieser allgemeine Satz kann als Satz über galoissche Körper ausgesprochen werden: Ist  $K/k$  galoissch, so ist ein Faktorensystem  $(a_{S,T})$  zu  $K/k$  dann und nur dann (in  $K$ ) zum Einsfaktorensystem assoziiert, wenn es in jeder  $\beta$ -adischen Erweiterung  $K_\beta$  zu eins assoziiert ist. Nun ist der Hauptgeschlechtssatz für zyklische Körper sozusagen der auf Ideale bezügliche Teil des Normensatzes: Normensatz für Einheiten und Hauptgeschlechtssatz ergeben den allgemeinen Normensatz. In dieser Arbeit wird umgekehrt aus dem Satz über Faktorensysteme eine Verallgemeinerung des Hauptgeschlechtssatzes auf beliebige galoissche Körper abgeleitet. Für die Formulierung des allgemeinen Hauptgeschlechtssatzes wird die verschränkte Produktbildung von  $K$  mit der Galoisgruppe auf die Gruppe  $\mathfrak{J}$  der Ideale von  $K$  übertragen. Mittels Symbolen  $u_S$ , die den Elementen  $S$  der galoisschen Gruppe zugeordnet sind, wird eine Gruppenerweiterung von  $\mathfrak{J}$  definiert: die Gesamtheit der Ausdrücke  $u_S \mathfrak{R}$  ( $\mathfrak{R}$  ein Ideal von  $K$ ) bildet eine Gruppe, wenn Multiplikationsregeln  $u_S u_T = u_{ST} \mathfrak{A}_{S,T}$ ,  $u_S \mathfrak{R} u_S = \mathfrak{R}^S$  festgelegt werden (dazu tritt noch die Assoziativbedingung, eine Relation für das Faktorensystem  $(\mathfrak{A}_{S,T})$ ). Soll nun zum verschränkten Produkt der Idealklassengruppe  $\mathfrak{J}$  mit der Galoisgruppe übergegangen werden, so muß nach einer geeigneten Definition der Äquivalenz zweier Idealfaktorensysteme  $(\mathfrak{A}_{S,T})$  gesucht werden. Da nämlich beim Übergang von  $\mathfrak{J}$  zu  $\mathfrak{J}$   $u_S$  mit  $u_S(c_S)$  äquivalent wird, so muß man fordern, daß die beim Übergang von  $u_S$  zu  $u_S(c_S)$  im verschränkten Produkt von  $\mathfrak{J}$  mit  $\mathfrak{G}$  zu  $\mathfrak{A}_{S,T}$  hinzutretenden Faktoren  $(c_T^S)(c_T)/(c_{ST})$  in der Hauptklasse der Idealklassenfaktorensysteme liegen. Dem wird Rechnung getragen durch die Definition: Die Hauptklasse der Faktorensysteme besteht aus allen Hauptidealen  $(a_{S,T})$ , wo die  $a_{S,T}$  so wählbar sind, daß die Algebra  $(a_{S,T}, K, \mathfrak{G})$  an allen Verzweigungsstellen von  $K$  zerfällt. Dies entspricht dem Umstand, daß man beim Hauptgeschlechtssatz für zyklische Körper im Oberkörper absolute Klassen, im Grundkörper aber Klassen nach dem Führer von  $K/k$  hat. — Nun heißt der Hauptgeschlechtssatz: Haben die Idealklassen  $\bar{c}_S$  von  $K$  (den Elementen  $S$  von  $\mathfrak{G}$  zugeordnet) die Eigenschaft, daß das Faktorensystem  $\bar{c}_S^T \bar{c}_S / \bar{c}_{ST}$  im Sinne der eben erklärten Klasseneinteilung der Faktorensysteme zu eins assoziiert ist, so sind die  $\bar{c}_S$   $(1 - S)$ -te Potenzen, d. h. es gibt eine Idealklasse  $\bar{b}$  in  $K$  mit der Eigenschaft  $\bar{c}_S = \bar{b}^{1-S}$ . Durch Spezialisieren auf den zyklischen Fall erhält man den alten Hauptgeschlechtssatz unmittelbar.

Deuring (Leipzig).

**Moriya, Mikao: Über die Klassenzahl eines relativzyklischen Zahlkörpers von Primzahlgrad.** Jap. J. Math. 10, 1—18 (1933).

Mittels des Hauptgeschlechtssatzes und der Formel für die ambigen Idealklassen eines relativzyklischen Zahlkörpers werden Sätze über den Zusammenhang zwischen der  $l$ -Klassengruppe eines Körpers  $k$  und der  $l$ -Klassengruppe eines zyklischen Erweiterungskörpers  $K$  vom Primzahlgrad  $l$  bewiesen. Unter gewissen Bedingungen werden obere und untere Schranken für den Exponenten der in der Klassenzahl von  $K$



aufgehenden Potenz von  $l$  angegeben, die von der in der Klassenzahl von  $k$  aufgehenden Potenz von  $l$  abhängen. Ferner wird gezeigt: Ist die  $l$ -Klassengruppe von  $K$  zyklisch, dann ist auch die  $l$ -Klassengruppe von  $k$  zyklisch und ihre Ordnung mindestens der  $l$ -te Teil der Ordnung der  $l$ -Klassengruppe von  $K$  (für ungerades  $l$ ). Für den rationalen Grundkörper  $k$  wird ferner gezeigt: Der Rang der  $l$ -Klassengruppe von  $K$  ist höchstens  $(e-1)(l-1)$ , wenn  $e$  die Anzahl der Diskriminantenteiler von  $K/k$  ist. Die Theorie der ambigen Idealklassen von  $K/k$  steht bekanntlich in Zusammenhang mit der Frage nach den Idealklassen von  $k$ , welche in die Hauptklasse von  $K$  fallen. Als Verschärfung eines Satzes von Hilbert (Zahlbericht, Satz 94) wird gezeigt: Die Anzahl der Idealklassen von  $k$ , welche in die Hauptklasse von  $K$  fallen, ist gleich dem Index der Gruppe der  $(1-\sigma)$ -ten Potenzen der Einheiten von  $K$  in der Gruppe derjenigen Einheiten  $H$  von  $K$ , welche in der Form  $A^{1-\sigma}$  darstellbar sind, wo  $(A)$  ein Ideal von  $k$  ist. Zum Schluß werden einige Sätze über die Klassenzahlen von Kreiskörpern aufgestellt. Zum Beispiel: Ist die Klassenzahl des größten reellen Teilkörpers des  $l$ -ten Kreiskörpers zu  $l$  prim ( $l$  ungerade Primzahl), und ist die Klassenzahl des  $l'$ -ten Kreiskörpers durch  $l^\mu$  ( $\mu \geq 1$ ) teilbar, so ist die Klassenzahl des  $l'^{+1}$ -ten Kreiskörpers mindestens durch  $l^{\mu+1}$  teilbar. Auch wird ein neuer Beweis des folgenden Satzes von Kummer gegeben: Wenn der zweite Faktor der Klassenzahl des  $l$ -ten Kreiskörpers gerade ist, so ist auch der erste Faktor gerade.

Deuring (Leipzig).

**Reestman, Bernardus Maria: Einleitung in die Theorie der Klassenkörper.** Amsterdam: Diss. 1933. 109 S. [Holländisch.]

Es handelt sich um eine Zusammenfassung der Grundbegriffe und Grundtheoreme der Klassenkörpertheorie. Die Beweise schließen sich teilweise an eine Vorlesung von E. Artin an und benützen vorwiegend den von Hasse eingeführten gruppentheoretischen Kalkül sowie neue Ergebnisse und Methoden der Klassenkörpertheorie. — Zunächst werden die Idealklassenteilungen nach Idealgruppen, die  $p$ -adischen Erweiterungen und die wichtigsten Sätze über  $\zeta$ - und  $L$ -Reihen behandelt. Insbesondere wird mit transzendenten Hilfsmitteln bewiesen, daß der Relativgrad eines Körpers mindestens so groß ist wie der Index der ihm im Grundkörper zugeordneten Idealgruppe und daran anschließend wird der auf Hasse und Scholz zurückgehende Satz hergeleitet, daß der Relativgrad eines nicht Galoisschen Körpers diesen Index stets übertrifft. Aus diesem Satze folgt dann leicht, daß jeder Klassenkörper Galoissch ist. Ist  $\mathfrak{h}$  die Idealgruppe des gegebenen Klassenkörpers und wird angenommen, daß zu jeder  $\mathfrak{h}$  umfassenden Idealgruppe ebenfalls ein Klassenkörper gehört, so läßt sich der Isomorphiesatz leicht beweisen, indem zunächst gezeigt wird, daß die Relativgruppe des Klassenkörpers und die Idealklassengruppe „strukturisomorph“ sind. Darunter wird die Tatsache verstanden, daß sich die Untergruppen dieser beiden Gruppen eindeutig aufeinander beziehen lassen, wobei nur Untergruppen derselben Ordnung einander entsprechen und Durchschnitt bzw. Kompositum zweier Untergruppen auf Durchschnitt bzw. Kompositum der entsprechenden Untergruppen abgebildet wird. — Unter den anderen Eigenschaften des Klassenkörpers wird vor allem der Satz von der arithmetischen Progression, der Verschiebungssatz und das Zerlegungsgesetz behandelt. Um zu zeigen, daß jeder relativ-zyklische Körper Klassenkörper ist, wird auch noch bewiesen, daß der Relativgrad eines zyklischen Körpers höchstens so groß ist wie der Index der zugeordneten Idealgruppe. Dieser Beweis benützt vor allem die Herbrand'schen Einheitensätze. Gleichzeitig ergibt sich der Hauptgeschlechtssatz und der Satz, daß jede Einheit, die Normenrest ist, auch Norm einer Zahl sein muß. Anschließend daran behandelt Verf. noch den Normensatz.

Taussky (Wien).

### **Analytische Zahlentheorie:**

**Deuring, Max: Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1.** Math. Z. 37, 405–415 (1933).

Durch Hecke-Landau weiß man, daß die Klassenzahl  $h_D$  des imaginär-



quadratischen Zahlkörpers  $K_D$  mit der Diskriminante  $-D$  größer als  $b(a) \frac{\sqrt[4]{D}}{\log D}$  und somit insbesondere nur endlich oft  $h_D = 1$  ist, wenn die zugehörige  $L$ -Funktion

$L_D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$  auf der reellen Strecke  $1 - \frac{a}{\log D} \leq s < 1$  von Null verschieden ist. Hier wird ein überraschender Zusammenhang zwischen dem Verhalten von  $h_D$  und den nichtreellen Nullstellen der gewöhnlichen Riemannschen  $\zeta$ -Funktion

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  entwickelt. Es wird nämlich bewiesen, daß, wenn es unendlich

viele  $D$  mit  $h_D = 1$  gibt, die folgenden Tatsachen gelten: Alle nichtreellen Nullstellen von  $\zeta(s)$

haben den Realteil  $\frac{1}{2}$  (Riemannsche Vermutung), (1)

sind einfach, (1')

und für jede solche Nullstelle  $\frac{1}{2} + it$  ist in der Folge aller  $D_\nu$  mit  $h_{D_\nu} = 1$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} D_\nu^{it} = - (4\pi)^{it} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - it) \zeta(1 - 2it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it) \zeta(1 + 2it)}, \quad (2)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{L_{D_\nu}(\frac{1}{2} + it)}{\log D_\nu} = - \frac{\zeta(1 + 2it)}{\zeta'(\frac{1}{2} + it)}. \quad (2')$$

Die Beweise beruhen auf einer asymptotischen Entwicklung der Dedekindschen

$\zeta_Q(s) = \sum_{m,n} \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^s}$ , ( $4ac - b^2 = D, a > 0$ ) einer Ideal-

klasse des quadratischen Zahlkörpers  $K_D$ , bei der das Hauptglied lautet:

$$\frac{1}{a^s} \zeta(2s) + a^{s-1} \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}$$

und der Rest  $R_Q(s)$  für  $\sigma = \Re s > 0$  und  $t_1 = \text{Max}(1, |\Im s|) \leq \frac{\pi \sqrt{D}}{18a}$  asymptotisch in

$D$  und  $a$  abgeschätzt wird. Diese Abschätzung führt dann unter der Annahme unendlich vieler Körper  $D_\nu$  mit  $h_{D_\nu} = 1$ , für die also  $\zeta_Q(s)$  mit der Dedekindschen  $\zeta$ -Funktion  $\zeta_{D_\nu}(s) = \zeta(s) L_{D_\nu}(s)$  von  $K_{D_\nu}$  selbst identisch ist, zu der Abschätzung:

$$\zeta_{D_\nu}(s) = \zeta(s) L_{D_\nu}(s) = \zeta(2s) + \left(\frac{D_\nu}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} + O\left(e^{-\frac{\sqrt{D_\nu}}{4}}\right) \text{ bei } \nu \rightarrow \infty$$

für  $\sigma > 0$ , aus der wegen  $\zeta(2s) \neq 0$  für  $\sigma > \frac{1}{2}$  sofort (1) und für  $s = \frac{1}{2} + it$  mit  $\zeta(s) = 0$  sofort (2) folgt. Entsprechend ergeben sich (1') und (2') durch asymptotische Abschätzung der Ableitung  $R'_Q(s)$  des Restes der asymptotischen Entwicklung von  $\zeta_Q(s)$ . — Unabhängig von der Annahme der Existenz unendlich vieler  $D_\nu$  wird noch bewiesen, daß die  $D_\nu$  jedenfalls so selten sind, daß  $\log D_{\nu+1} > c \sqrt[4]{D_{\nu-1}}$  mit einer positiven Konstanten  $c$  ist. — Bemerkung: Der Verf. schreibt in den Formeln durchweg  $d$  für  $\frac{D}{4}$ . In (2) und (2') hat er versehentlich rechts die Minuszeichen ausgelassen.

Hasse (Marburg, Lahn).

**Zorn, Max:** Note zur analytischen hyperkomplexen Zahlentheorie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, 197—201 (1933).

Ein neuer Beweis des Satzes, daß eine Algebra  $\mathfrak{A}$  über einem Zahlkörper  $k$  als Zentrum dann und nur dann volle Matrixalgebra über  $k$  wird, wenn dies für jede  $p$ -adische Erweiterung  $\mathfrak{A}_p$  der Fall ist ( $p$  durchläuft alle Primstellen von  $k$ ) oder auch: Eine Divisionsalgebra  $\mathfrak{A}/k$  hat mindestens eine Verzweigungsstelle  $p$ . Der Beweis stützt sich auf die von K. Hey in ihrer Diss.: Analytische Zahl.th. in Syst. hyperkompl. Zahlen (Hamburg 1929), entwickelte Theorie der Zetafunktion einer Divisionsalgebra  $\mathfrak{A}$ . Diese Funktion  $\zeta_{\mathfrak{A}}(s)$  ist für  $R(s) = \sigma > 1$  definiert durch  $\zeta_{\mathfrak{A}}(s) = \sum N a^{-s}$ ,



$\alpha$  durchläuft alle ganzen Rechtsideale einer Maximalordnung  $\mathfrak{o}$ . Auf Grund des Zerlegungsgesetzes wird  $\zeta_{\mathfrak{A}}(s)$  durch die Zetafunktion  $\zeta_k(s)$  des Zentrums ausgedrückt:

$$\zeta_{\mathfrak{A}}(s) = \prod_{i=1}^g \zeta_k(g s - (i-1)) \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\prod_{i=1}^g (1 - N_{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}^{-(g s - (i-1))})}{\prod_{i=1}^g (1 - N_{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}^{-m_{\mathfrak{p}} (\lambda_{\mathfrak{p}} s - (i-1))})}, \quad (1)$$

$\mathfrak{p}$  durchläuft dabei alle in  $\mathfrak{A}$  verzweigten endlichen Primideale von  $k$ , es ist

$$[\mathfrak{A}:k] = g^2, \quad [\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}:k_{\mathfrak{p}}] = g^2 = m_{\mathfrak{p}}^2 \lambda_{\mathfrak{p}}^2,$$

$m_{\mathfrak{p}}$  ist der Index der in  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$  steckenden Divisionsalgebra. K. Hey bewies nun für die Funktion

$$\varphi_{\mathfrak{A}}(s) = \zeta_{\mathfrak{A}}(s) \pi^{-\frac{g^2 n s}{2}} \left| \frac{\Delta}{\bar{\Delta}} \right|^{\frac{s-1}{2}} \prod_{j=1}^{\bar{r}} \left\{ \pi^{\frac{\sigma_j f_j^2}{2}} \prod_{i=1}^{f_j} \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma_j}{2} (f_j s - (i-1))\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma_j}{2} (f_j - (i-1))\right)} \right\}, \quad (2)$$

in der  $\Delta$  die Diskriminante von  $\mathfrak{A}$  und die  $\sigma_j, f_j$  und  $\bar{r}, \bar{\Delta}$  auf das Verhalten der unendlichen Primstellen von  $k$  in  $\mathfrak{A}$  sich beziehende Konstanten sind, erstens, daß  $\varphi_{\mathfrak{A}}(s)$  in der ganzen Ebene regulär ist bis auf je einen Pol erster Ordnung bei  $s=0$  und  $s=1$ ; zweitens, daß die Funktionalgleichung  $\varphi_{\mathfrak{A}}(s) = \varphi_{\mathfrak{A}}(1-s)$  besteht. Das Beweisverfahren ist dem von Hecke für die Zetafunktion eines Zahlkörpers nachgebildet. K. Hey schloß nun aus der jetzt evidenten Regularität von  $\zeta_{\mathfrak{A}}(s)$  für  $0 < s < 1$  wegen der für  $0 < i < g$  in (1) auftretenden Pole von  $\zeta_k(s)$  auf das Vorhandensein von verzweigten  $\mathfrak{p}$ , weil diese Pole von den in (1) rechts stehenden Faktoren der  $\mathfrak{p}$  aufgehoben werden müßten. Jedoch ist dieser Schluß inkorrekt, weil  $\zeta_k(s)$  bei  $s=0$  eine Nullstelle haben kann, und  $\mathfrak{A}$  im Endlichen gar nicht verzweigt zu sein braucht. Verf. bringt nun diesen Gedanken zur erfolgreichen Durchführung, indem er die Funktion  $\varphi_{\mathfrak{A}}(s)$  mittels (1) und (2) durch die zu  $k$  gehörige Funktion  $\zeta_k(s)$  ausdrückt in der Gestalt

$$\varphi_{\mathfrak{A}}(s) = e^{g(s)} \prod_{i=1}^g \varphi_k(g s - (i-1)) \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\prod_{i=1}^g (1 - N_{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}^{-(g s - (i-1))})}{\prod_{i=1}^g (1 - N_{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}^{-m_{\mathfrak{p}} (\lambda_{\mathfrak{p}} s - (i-1))})} \quad (3)$$

für den Fall, daß  $\mathfrak{A}/k$  in keiner unendlichen Primstelle verzweigt ist.  $g(s)$  ist eine ganze Funktion. Jetzt liefert die Heysche Schlußweise, auf  $\varphi_{\mathfrak{A}}(s)$  angewendet, die Existenz eines in  $\mathfrak{A}$  verzweigten endlichen Primideals  $\mathfrak{p}$  (für  $g > 1$ ). — Wenn  $\mathfrak{A}$  auch unendliche Verzweigungsstellen hat, so tritt in (3) rechts noch ein Faktor aus Gammafunktionen hinzu. Wendet man nun in (3) links die Funktionalgleichung für  $\varphi(s)$ , rechts die für  $\varphi_k(s)$  an und vergleicht das Ergebnis mit der ursprünglichen Gleichung (3), so erhält man eine Relation zwischen Gammafunktionen und Exponentialfunktionen, die sich leicht auf eine Anzahlrelation für die Verzweigungsstellen reduziert. Für den Fall eines Quaternionensystemes ( $[\mathfrak{A}:K]=4$ ) erweist sich diese Relation als gleichbedeutend mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz in der Hilbertschen Form als Produktrelation für das Normenrestsymbol eines quadratischen Erweiterungskörpers.

Deuring (Leipzig).

**Phillips, Eric:** The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 209—225 (1933).

This paper is a contribution to the unsolved problem of the order of Riemann's zeta-function  $\zeta(\sigma + it)$  as  $t \rightarrow \infty$ . It was proved by van der Corput and Koksma, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) 22, 1—39 (1930), that

$$\zeta(\sigma + it) = O(t^{1/(4Q-2)} \log t),$$

where  $Q = 2^{q-1}$ , on each of the lines  $\sigma = 1 - (q+1)/(4Q-2)$ , for  $q = 2, 3, 4, \dots$ ;

and by Titchmarsh (see this Zbl. 3, 246) that  $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O\left(t^{\frac{27}{164}}\right)$ . Here the author



improves these results, proving that  $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O\left(t^{\frac{229}{1392}}\right)$ , and that (with the same notation)

$$\zeta(\sigma + it) = O\left(t^{\frac{1}{4Q-2} \left\{ \frac{240Qq-16Q+128}{240Qq-15Q+128} \right\}}\right),$$

for  $q = 3, 4, \dots$ . The method depends on obtaining inequalities of the form

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(z^k a^k),$$

where  $z$  depends on  $f(n)$ , whereas in van der Corput's method, there are several terms of the same form on the right-hand side. *E. C. Titchmarsh* (Oxford).

**Wigert, S.:** *Remarques sur un problème de la théorie des nombres.* Ark. Mat. Astron. Fys. 24 B, Nr 1, 1–6 (1933).

Es sei  $\theta(n)$  die Anzahl der in  $n$  aufgehenden Primzahlen, mehrfach aufgehende mehrfach gezählt. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\theta(n)} n^{-s} = \prod_p (1 - 2p^{-s})^{-1}.$$

Ausgehend von dieser Identität beweist Verf. mit den üblichen Methoden der analytischen Zahlentheorie

$$\frac{1}{\xi} \int_1^{\xi} \sum_{1 \leq n \leq x} 2^{\theta(n)} dx = A\xi \log^2 \xi + B\xi \log \xi + O(\xi),$$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, 6)=1}} 2^{\theta(n)} = Cx \log x + Dx + O\left(x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log 5}} \log^E x\right).$$

Eine entsprechende Formel für  $\sum_{n \leq x} 2^{\theta(n)}$  anzugeben, scheint mit diesen Hilfsmitteln nicht möglich zu sein, da die erzeugende Funktion auf der Geraden  $\sigma = 1$  unendlich viele Pole besitzt. *Hans Heilbronn* (Cambridge).

**Bernstein, Vladimiro:** *Sui recenti progressi della teoria delle serie di Dirichlet.* Boll. Un. Mat. Ital. 12, 159–167 (1933).

L'auteur résume les résultats modernes concernant l'allure des fonctions définies par les séries de Dirichlet générales:  $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ . L'auteur traite surtout les problèmes concernant les singularités de  $f(s)$ . Il y est surtout question des théorèmes de M. M. Landau, Landau-Carlson, Pólya, V. Bernstein, Cramér, Soula, Ostrowski et Mandelbrojt. L'auteur indique aussi quelques „Tauberiens“, en particulier celui de Hardy-Littlewood-Karamata. *Mandelbrojt.*

**Szekeres, G., und P. Turán:** *Über das zweite Hauptproblem der „Factorisatio Numerorum“.* Acta Litt. Sci. Szeged 6, 143–154 (1933).

Die Verff. betrachten die summatorische Funktion von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1},$$

wo also  $a_n$  für  $n > 1$  angibt, auf wie viele Arten  $n$  als Produkt von Faktoren  $> 1$ , ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, darstellbar ist — und zeigen mit dem Cauchyschen Integral:

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{2\sqrt{x} \log^{\frac{1}{2}} x} \left\{ 1 + A_1 \log^{-\frac{1}{2}} x + \dots + A_{k-1} \log^{-\frac{k}{2} + \frac{1}{2}} x + O\left(\log^{-\frac{k}{2}} x\right) \right\},$$

wobei  $k$  beliebig sein darf und die  $A$  geeignete Konstanten bezeichnen. — Dies und noch mehr brachte indessen schon A. Oppenheim, J. London Math. Soc. 2. *Walfisz.*

**Wright, E. Maitland:** *Asymptotic partition formulae. II. Weighted partitions.* Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 117–141 (1933).

A weighted partition is defined as follows. Suppose that an integer  $n$  is to be expressed as a sum of parts chosen from the positive integers  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , each being



capable of repetition any number of times in any particular partition. Let these integers be weighted respectively  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , so that for example  $n = 2\mu_h + \mu_j + \mu_k$  will count  $\lambda_h^2 \lambda_j \lambda_k$  towards the total number of weighted partitions. — In this paper the numbers  $\mu_1, \mu_2, \dots$  are all positive integers, and the weights are all equal, real and positive, say  $= a$ . The number of partitions is then  $p_a(n)$ , where

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - ax^i)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_a(n) x^n.$$

The object of the paper is to obtain an asymptotic expansion of  $p_a(n)$  for large values of  $n$ . The case  $a = 1$  is that of ordinary partitions, and is dealt with in a well-known memoir of Hardy and Ramanujan, Proc. London Math. Soc. II s. 17, 75—115 (1918). It is found that for  $a \geq a_0 > 1$ ,  $p_a(n)$  is represented by a convergent series. In  $1 < a < a_0$  the corresponding series is divergent, and gives an asymptotic expansion of  $p_a(n)$ . For  $a < 1$  two forms of asymptotic expansion are obtained, one in a series of Bessel functions, and one in a series of descending powers of  $n^{\frac{1}{2}}$  (I. cf. this Zbl. 2, 382).

E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Krečmar, V.:** Sur les propriétés de la divisibilité d'une fonction additive. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 6, 763—800 (1933) [Russisch].

Es sei  $p(n)$  die Anzahl der unbeschränkten Zerfällungen von  $n$  in Summanden, d. h.  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} p(n) x^n$ . Beim Studium einer  $p(n)$ -Tafel für  $n \leq 200$  kam

Ramanujan auf folgenden Satz: „Ist  $q$  Potenz von 5 oder 7 oder 11 und  $24r \equiv 1$ , so ist  $p(n) \equiv 0$  für  $n \equiv r$ , alles mod  $q$ .“ Bewiesen wurde dieser Satz (durch Ramanujan, Darling und Mordell) nur in den folgenden Spezialfällen:  $q = 5, q = 7, q = 11, q = 25, q = 49$ . In der vorliegenden Arbeit bringt Verf. diese fünf Fälle und fügt  $q = 125$  hinzu. Die Beweise werden nach einheitlichen Gesichtspunkten geführt, indem Verf. ein Ramanujansches Verfahren (vgl. Nr. 30 der Coll. Pap.) zweckmäßig ausbaut. Die Betrachtungen sind an mehreren Stellen, sobald sie an sich lohnen, weiter durchgeführt, als es für den Hauptzweck notwendig war. Auch ein Paragraph über

die Ramanujansche Funktion  $\tau(n) \left[ x \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(n) x^n \right]$  ist eingeschaltet;

doch sind die hier gegebenen Kongruenzen  $\tau(n) \equiv 0$  für  $n \equiv 0 \pmod{q}$ , sobald  $q$  Potenz von 5 oder von 7, nur naheliegende Folgerungen bekannter Modellscher Formeln. — Zahlreiche Druckfehler.

A. Walfisz (Radość, Polen).

**Khintchine, A.:** Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Rec. math. Moscou 40, 180—189 (1933).

Verf. beschäftigt sich mit folgender Frage: Gegeben sei eine Folge  $f$  von natürlichen Zahlen. Es sei  $F$  die Folge, die aus den positiven Quadratzahlen und allen Zahlen besteht, die sich als Summe einer Quadratzahl und einer Zahl aus  $f$  darstellen lassen (mehrfach auftretende einfach gezählt). Es sei  $\varphi(n)$  bzw.  $\Phi(n)$  die Anzahl der Zahlen aus  $f$  bzw.  $F$ , die  $n$  nicht übersteigen. Es sei  $\varphi(n) \cong \alpha n$  für alle ganzen  $n > 0$ . Dann ist  $\Phi(n) \cong (\alpha + \gamma(\alpha))n$ , wo  $\gamma(\alpha) > 0$  für  $0 < \alpha < 1$  und  $\gamma(\alpha)$  nur von  $\alpha$  abhängt. Dieser Satz stellt deswegen etwas prinzipiell Neues dar, weil die Voraussetzungen über die beiden Folgen gänzlich unsymmetrisch sind; die Folge  $f$  hat positive Dichte, ist aber in ihrem arithmetischen Verhalten unbekannt, während die Folge der Quadratzahlen arithmetisch bestimmt ist, aber die Dichte 0 besitzt. — Der Beweis, der kompliziert, aber ohne höhere Hilfsmittel geführt wird, beruht auf der Möglichkeit, jede ungerade Zahl als Differenz zweier Quadratzahlen darzustellen. Hans Heilbronn (Cambridge).

**Gelbke, M.:** À propos de  $g(k)$  dans le problème de Waring. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 5, 631—640 (1933) [Russisch].

Für die bekannte Funktion  $g(k)$  des Waring'schen Problems ist nach Landau („Vorlesungen über Zahlentheorie“, Satz 364)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(k)}{k 2^{k-1}} \leq 1$ . In der vorliegenden

Arbeit weist Verf. nach, daß dieser  $\overline{\lim}$  sogar  $\leq \frac{1}{2}$  ist. Er stützt sich dabei im wesentlichen auf seine Abhandlung „Zum Waringschen Problem“ (vgl. dies. Zbl. 3, 150), sodann auch auf die gleichnamige Note Landaus (Math. Z. 32) und dessen „Vorlesungen“. Unter Hinweis auf diese Quellen kann Verf. die meisten Beweise seiner Hilfssätze unterdrücken oder durch knappe Angabe der vorzunehmenden Änderungen ersetzen; er tut dies jedoch mit geziemender Rücksicht auf den Leser, dem keine schwierige Rechnung vorenthalten wird.

A. Walfisz (Radość, Polen).

**Itihara, Tetuzi, and Kyôichi Ôishi: On transcendental numbers.** Tôhoku Math. J. 37, 209—221 (1933).

Mit Hilfe des Lindemannschen Satzes zeigen die Verff. den Satz: „Die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots$  der Reihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \neq 0$  seien algebraische Zahlen; es sei

$a_n + p_1 a_{n-1} + \dots + p_k a_{n-k} = 0$  für  $n \geq k$ , wobei  $k$  eine feste natürliche Zahl und die  $p_1, p_2, \dots, p_k$  feste algebraische Zahlen mit  $p_k \neq 0$  sind. Bis auf höchstens  $k$  Ausnahmewerte ist dann  $f(x)$  stets eine transzendente Zahl für algebraisches  $x$ .“ Weiter

zeigen sie den Satz: „Die Reihe  $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^{-\sigma_n}$  stellt eine transzendente Zahl dar, falls

die Koeffizienten  $a_n$  nichtverschwindende ganze rationale Zahlen mit beschränktem Absolutbetrag und die Exponenten  $\sigma_n$  natürliche Zahlen mit  $\sigma_{n+1} \geq r \sigma_n$  sind, wobei  $r > 1$  eine Konstante bedeutet.“ (Daß die  $a_n$  ungleich Null sein müssen, wird im Text nicht gesagt. Die vielen Druckfehler und nicht erklärten Bezeichnungen haben es dem Referenten nicht ermöglicht, den Beweis zu verstehen.)

Mahler (Manchester).

## Analysis.

● **Behrens, Walter-Ulrich: Mathematische Methoden für Versuchsansteller auf den Gebieten der Naturwissenschaften, Landwirtschaft und Medizin.** Stuttgart: Eugen Ulmer 1933. 137 S. u. 14 Abb. RM. 8.—.

**Dieudonné, J.: Sur une fonction continue sans dérivée.** Mathesis 47, 277—279 (1933).

Eine stetige nirgends differenzierbare Funktion wird in folgender Weise konstruiert: Es sei  $f(x)$  eine lineare nicht konstante Funktion im Intervall  $a \leq x \leq b$ . Man teile das Intervall in 3 gleiche Teile  $(a, a')$ ,  $(a', b')$  und  $(b', b)$  und ersetze  $f$  durch diejenige Funktion  $f_1$ , die in jedem der Teilintervalle linear ist und in den End- und Teilpunkten die Werte  $f_1(a) = f(a)$ ,  $f_1(a') = f(b')$ ,  $f_1(b') = f(a')$ ,  $f_1(b) = f(b)$  hat. Der Differenzenquotient von  $f_1$  im ersten und letzten Teilintervall ist dann doppelt so groß wie der von  $f$ , und im zweiten Teilintervall bekommt er das entgegengesetzte Vorzeichen. Wird derselbe Prozeß auf  $f_1$  bezüglich jedes Teilintervalls angewendet, so erhält man eine Funktion  $f_2$ , die durch einen aus neun Strecken bestehenden Polygonzug dargestellt wird. So fährt man fort. Man erkennt leicht, daß die Folge  $f_1, f_2, \dots$  gleichmäßig konvergiert und daß sich auf jeden Punkt eine Folge von ineinander geschachtelten, bei der obigen Konstruktion auftretenden Intervallen zusammenzieht, derart, daß die zu diesen Intervallen gehörigen Differenzenquotienten der Grenzfunktion nicht konvergieren.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Bhatnagar, S. P.: On Rolle's function  $\theta$  in the mean value theorem for the case of the nowhere differentiable  $f'(x)$  defined by Dini.** Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 1—22 (1933).

Die Funktion  $\vartheta(h)$ , die in dem Mittelwertsatz  $f(x+h) - f(x) = h f'(x + \vartheta \cdot h)$  auftritt, wird für den Fall  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(16^n x)}{2^n}$  untersucht. Rellich (Göttingen).



**Lipka, Stephan:** Zu den Verallgemeinerungen des Rolleschen Satzes. Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 180—183 (1933).

L'auteur démontre entre autre le théorème suivant qui présente quelques analogies avec le théorème de Rolle. Soit  $f(z) = (z^2 - 1)g(z)$ ,  $g(z)$  étant holomorphe pour  $|z| \leq 1$ , et ne s'annulant pas dans ce cercle. Si en tout point  $z = e^{i\theta}$ , où  $\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) = 0$ , on a  $\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) \sin \theta < 1$ , alors  $f'(z) = 0$  possède dans  $|z| < 1$  une et une seule racine. Ce théorème contient un théorème de M. Dieudonné [Ann. of Math. (2) **31**, 79—116 (1930)].

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Nagumo, Mitio:** Über den Mittelwert, der durch die kleinste Abweichung definiert wird. Jap. J. Math. **10**, 53—56 (1933).

Die folgende Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels wird untersucht: Es sei  $\varphi(x)$  für  $x \geq 0$  stetig und monoton wachsend. Dann wird als Mittelwert  $M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  von  $n$  reellen Zahlen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  derjenige Wert von  $x$  bezeichnet, für den die Funktion  $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$  ihr Minimum annimmt. Für Existenz und Eindeutigkeit dieses Minimums ist notwendig und hinreichend, daß  $\varphi$  überdies konvex im starken Sinne ist.  $M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  ist dann und nur dann eine homogene Funktion ersten Grades der  $\xi_i$ , wenn  $\varphi(x)$  von der Form  $cx^\alpha$  ist, wo  $c > 0$  und  $\alpha > 1$  Konstanten sind.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Jessen, Børge:** Über eine allgemeine Ungleichung zwischen Mittelwerten. Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 67—79 (1933).

Das Ergebnis dieser Arbeit, die Aufstellung der allgemeinsten Ungleichung zwischen den Potenzmittelwerten der nicht negativen Funktionen von mehreren Variablen, hat der Verf. schon in einer früheren [vgl. dies. Zbl. **3**, 301, insbesondere Ungleichung (1) jenes Referates] hergeleitet. Dort waren jedoch nur stückweise stetige Funktionen zugelassen, während sich die Ausführungen der vorliegenden Arbeit auf die Klasse der Funktionen  $f$  beziehen, für die  $f^p$  bei jedem  $p \neq 0$  summierbar ist.

W. Fenchel.

**Vignaux, J. C.:** Un teorema sugli integrali doppi di Abel-Laplace. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 1055—1059 (1933).

L'intégrale double  $\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y) dx dy = S$  étant supposée existante, l'auteur démontre à l'aide de la seconde formule de la moyenne le fait évident que l'on a aussi

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha x - \beta y} \cdot \varphi(x, y) dx dy = S.$$

E. Kogbetliantz (Téhéran).

**Zygmund, A.:** On an integral inequality. J. London Math. Soc. **8**, 175—178 (1933).

A simplified proof of a theorem due to F. Riesz: Let  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  be non-negative and measurable over  $(-\infty, \infty)$ . Let  $f^*(x)$ ,  $g^*(x)$ ,  $h^*(x)$  be non-negative, even, non-increasing in  $(0, \infty)$ , and equimeasurable respectively with  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . Then  $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x) g(t) h(x+t) dt \leq \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f^*(x) g^*(t) h^*(x+t) dt$  [J. London Math. Soc. **5**, 162—168 (1930)]. By using simple approximation theorems the proof is reduced to the case where  $f$ ,  $g$ ,  $h$  are step-functions, and becomes fairly easy. J. D. Tamarkin.

**Titchmarsh, E. C.:** A proof of a theorem of Watson. J. London Math. Soc. **8**, 217—220 (1933).

A simplified proof of an important result due to Watson [Proc. London Math. Soc., II. s. **35**, 156—199 (1933); see this Zbl. **7**, 64]: If  $\chi(x)$  is real and

$$\int_0^\infty \chi(xy) \chi(zy) y^{-2} dy = \min(x, z),$$

then for each  $f(x) \in L_2$  over  $(0, \infty)$  there corresponds a function  $g(x) \in L_2$  such that  $g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \chi(xy) y^{-1} f(y) dy$  and  $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \chi(xy) y^{-1} g(y) dy$ . This result is first obtained by a direct computation in the case where  $f(x)$  belongs to the class of functions with a continuous derivative and vanishing for large values of  $x$  and then is extended to the general case by using the facts that this class of functions is dense in  $L_2$  and that the transformation  $f \rightarrow g$  possesses the property  $\int_0^\infty f^2 dx = \int_0^\infty g^2 dx$ . *Tamarkin.*

### Reihen:

**Itihara, Tetuzi:** On the multivalency of power series. *Jap. J. Math.* **10**, 71—78 (1933).

L'auteur donne plusieurs formules permettant de calculer le rayon  $\rho$  du cercle autour de l'origine tel que la fonction (1)  $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$  et ses sections soient  $k$ -valentes dans ce cercle. Citons par exemple la formule suivante:

$$\rho = \alpha \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + |a_k|} \right)^{\frac{1}{k+1}} \right] \text{ où } \alpha = \text{borne inf. de } \left( \frac{1}{|a_{k+\nu}|} \right)^{\frac{1}{\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

L'auteur donne aussi différentes inégalités existant entre les coefficients nécessaires pour que (1) soit univalente dans un cercle de rayon  $\rho$  autour de l'origine. *Mandelbrojt.*

**Sestini, Giorgio:** Sugli sviluppi in serie lacunari di funzioni di Sturm-Liouville. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. **66**, 427—433 (1933).

Extension to the Sturm-Liouville series of two known theorems of Zygmund and Szidon: 1. If a lacunary Sturm-Liouville series  $\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_{n_k}(x)$ ,  $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1$ , converges at all points of an interval  $(a, b)$  then it converges absolutely. 2. If  $f(x)$  is integrable and its Fourier-Sturm-Liouville series is lacunary,  $f(x) \sim \sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_{n_k}(x)$ , then  $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ .

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Sestini, Giorgio:** Un teorema sugli sviluppi in serie lacunari di funzioni di Sturm-Liouville. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. **66**, 481—490 (1933).

Extension to the Sturm-Liouville series of a theorem of Zygmund: If  $\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_{n_k}(x)$ ,  $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1$ , is a lacunary Sturm-Liouville series which converges on a set of positive measure, then  $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 < \infty$ , and the series is a Fourier series of a function of  $L_2$ .

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Onofri, Luigi:** Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. **12**, 41—56 (1933).

L'auteur détermine le domaine de convergence des séries de la forme

$$\sum a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)],$$

où les fonctions  $\varphi$  et  $f_n$  sont entières, les  $p_n$  étant des entiers tendant vers l'infini.

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Vignaux, J.-C.:** Sur une généralisation de la sommation de M. Borel. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **197**, 668—670 (1933).

**Hayashi, Goro:** Einige Sätze über Borelsche und Abelsche Summierung der divergenten Reihen. *Tôhoku Math. J.* **37**, 164—168 (1933).

L'auteur indique les relations existant entre la sommabilité  $A$  (d'Abel:  $\sum_{n \rightarrow 1} a_n x^n \rightarrow l$  — somme de (1)  $\sum a_n$ ) avec celle de M. Knopp [la série (1) est sommable  $B_k$  si  $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n t^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)} = F_k(t)$  est une fonction entière, et si  $f_k(t) = e^{-t} F_k(t)$  tend vers  $l$ -somme de (1) — lorsque  $t \rightarrow \infty$ ].

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).



**Matumoto, Kôtarô: Theorems on limits.** Tôhoku Math. J. **37**, 471—474 (1933).

Quelques propositions généralisant des théorèmes connus [ce Zbl. **1**, 135 (Izumi)] qui concernent le problème de l'inversion du théorème de Cauchy que voici: Si une suite  $\{s_n\}$  tend vers une limite, alors la suite  $\left\{t_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}\right\}$  tend vers la

même limite. L'auteur démontre p. e. que: Si 1° la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{a_n}$  à termes positifs diverge, 2° il existe la limite  $\lim_{p_n} \frac{q_n}{p_n}$  et 3°  $a_n(t_n - t_{n-1}) + p_n t_n = o(q_n)$ , alors  $t_n = o\left(\frac{q_n}{p_n}\right)$ .

*F. Leja (Warszawa).*

**Plancherel, M.: Sur les formules de réciprocity du type de Fourier.** J. London Math. Soc. **8**, 220—226 (1933).

Another simplified and generalized treatment of results of Watson (see this Zbl. **7**, 302). The main theorem is proved here first for step-functions and then extended to the general case. The author extends Watson's results to the case of a complex  $\chi(x)$  and gives a simplified derivation of the solution of the functional equation

$$\int_0^{\infty} \chi(xy) \bar{\chi}(zy) y^{-2} dy = \min(x, z),$$

and also of the equation  $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(xy) \bar{\chi}(zy) y^{-2} dy = \min(|x|, |z|)$  or 0, according as  $xz \geq 0$  or  $xz \leq 0$ . This equation is to replace the preceding one if the interval  $(0, \infty)$  of Watson is replaced by  $(-\infty, \infty)$ . *J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Hardy, G. H.: A theorem concerning Fourier transforms.** J. London Math. Soc. **8**, 227—231 (1933).

Two proofs are given to the following precise formulation of a remark of Wiener to the effect that a pair of Fourier transforms  $f(x)$  and  $g(x)$  cannot both be very small: If  $f(x)$  and  $g(x)$  are both  $O(|x|^m e^{-x^2/2})$  for large  $x$  and some  $m$ , then each is a finite linear combination of Hermite functions. In particular, if  $f(x)$  and  $g(x)$  are both  $O(e^{-x^2/2})$  then  $f=g= Ae^{-x^2/2}$ , where  $A$  is a constant; and if one is  $o(e^{-x^2/2})$ , then both are nul. The first proof of this theorem is based on an argument of Phragmen-Lindelöf type, and the second on some ideas of the theory of reciprocal functions developed recently by the author and Titchmarsh [Quart. J. Math., Oxford Ser., **1**, 196—231 (1930)].

*J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Takahashi, Tatsuo: A remark on Hardy's theorem concerning Riesz's summation of the Fourier series.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **15**, 181—183 (1933).

Let  $f(t)$  be periodic and integrable over  $(-\pi, \pi)$ . Let  $\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2s]$ ,  $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u) |du$ ,  $\varphi_1(t) = \int_0^t \varphi(u) du$ . Hardy [Quart. J. Math., Oxford Ser. **2**, 107—112 (1931); this Zbl. **2**, 130] proved that if the condition (1)  $\Phi(t) = o\left(t \log \frac{1}{t}\right)$  is satisfied then a necessary and sufficient condition for the summability of the Fourier series of  $f(t)$  to the value  $s$  by Riesz' logarithmic means (R. 1)  $\left[s = \lim_{\log n} \frac{1}{\log n} \left(s_1 + \frac{s_2}{2} + \dots + \frac{s_n}{n}\right)\right]$  is that (2)  $\int_t^{\pi} \frac{\varphi(u)}{u} du = o\left(\log \frac{1}{t}\right)$  as  $t \rightarrow 0$ . In the present paper the author proves that Hardy's result holds under less restrictive hypothesis, namely when (1) is replaced by the two conditions (1')  $\Phi(t) = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$  and (1'')  $\varphi_1(t) = o\left(t \log \frac{1}{t}\right)$ .

*J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Bochner, S.: Simultankonvergenz von mehrfachen Fourierschen Reihen und Integralen.** Math. Z. **37**, 566—571 (1933).

Let  $f(x)$  be integrable over  $(-\pi, \pi)$ . Let  $s_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)} dx$ ,  $S_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x/2} dx$ . It is well known that  $s_n - S_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . The author shows that this result is no more valid in the case of two variables, when  $s_n$  and  $S_n$  are replaced respectively by

$$s_{m,n} = (4\pi^2)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin(y/2)} dx dy$$

and

$$S_{m,n} = (4\pi^2)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x}{x/2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{y/2} dx dy.$$

It is shown, however, that if one of the sequences  $\{s_{m,n}\}$ ,  $\{S_{m,n}\}$  converges boundedly, so does the other, and to the same limit. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

### Differentialgleichungen:

**Gourin, E.: On irreducible systems of algebraic differential equations.** Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 593—595 (1933).

Bewiesen wird: Wenn die Mannigfaltigkeit der Lösungen eines irreduziblen abgeschlossenen Systems von algebraischen Differentialgleichungen in der Mannigfaltigkeit der Lösungen eines anderen ebensolchen Systems enthalten und nicht mit ihr identisch ist, so enthält entweder die erste Mannigfaltigkeit weniger willkürliche Funktionen, oder die willkürlichen Funktionen des ersten Systems sind dieselben wie die des letzteren, aber die Resolvente des ersten Systems ist von kleinerer Differenzierungsordnung als die des zweiten. Die Terminologie ist die der Monographie von *J. F. Ritt* (vgl. dies. Zbl. **5**, 394). *van der Waerden* (Leipzig).

**Ikeda, Yoshirô: Anwendung der Operatordifferentialgleichung auf die lineare Differentialgleichung.** Tôhoku Math. J. **37**, 202—208 (1933).

Durch die Laplacesche Transformation und Reihenentwicklungen werden einige gewöhnliche lineare Differentialgleichungen gelöst (als Beispiel die Besselsche Differentialgleichung). *L. Fantappiè* (Bologna).

**Lewis jr., D. C.: Infinite Systems of ordinary differential equations with applications to certain second order partial differential equations.** Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 792—823 (1933).

Existence theorems for non-linear hyperbolic and parabolic partial differential equations of the form,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, u, y, t\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y}, u, y, t\right),$$

are obtained by considering certain infinite systems of ordinary differential equations by methods somewhat similar to those developed by *Lichtenstein* and *Siddiqi* [*J. reine angew. Math.* **158**, 80—91 (1927); *Math. Z.* **35**, 464—484 (1932)]. The characteristic requirement on the functions  $F$  and  $G$  is that they should satisfy a certain Lipschitz condition. — There is also introduced a natural generalization of the notion of a solution of a partial differential equation. This generalization is applied to the hyperbolic equation but, mainly for the sake of brevity, not to the parabolic equation. — The results are more general than those obtained by *Lichtenstein* and *Siddiqi* both as regards the initial conditions and the type of equations. But in the case of the parabolic equation *Siddiqi* obtains an infinite interval,  $0 \leq t < \infty$ , for which his solution is valid, whereas the present treatment yields only a sufficiently small interval,  $0 \leq t \leq K > 0$  (see this Zbl. **4**, 256). *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).



Gennusa, S.: **Integrazione per quadrature dell'equazione differenziale**  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 87—92 (1933).

Durch eine strenge Berechnung der „Funktionen“ des Operators  $J\varphi = \int_{x_0}^x \varphi(t, y) dt$  (Integration), wird die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

gelöst, mit den Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$z(x_0, y) = \varphi_0(y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \varphi_1(y), \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = \varphi_2(y).$$

Die unbekannte Funktion  $z(x, y)$  wird durch die bekannten Funktionen explizit ausgedrückt, mit nur drei Quadraturen und der Berechnung eines Residuums.

L. Fantappiè (Bologna).

Cibrario, Maria: **Alcuni teoremi di esistenza e di unicità per l'equazione**  $xx'' + z_{yy} = 0$ . Atti Accad. Sci. Torino 68, 35—44 (1933).

Untersuchung der im Titel erwähnten Gleichung in einem Gebiet, das eine Strecke der  $y$ -Achse im Inneren oder auf dem Rand enthält, wobei der in der Halbebene  $x < 0$  liegende Teil des Gebietes von zwei charakteristischen Parabeln begrenzt ist. Verf. gibt mehrere Sätze über die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen  $z(x, y)$ , die vorgegebene Randbedingungen befriedigen und auf der  $y$ -Achse verschwinden. Die Beweise sind aber manchmal nur skizziert.

G. Cimmino (Napoli).

Rust jr., W. M.: **The cooling problem for spherical regions**. Amer. J. Math. 55, 340—348 (1933).

Es handelt sich um das Problem, zwei Funktionen  $u_1, u_2$  der Veränderlichen  $r, t > 0$  bzw. in den Streifen  $0 < r < m, m < r < l$  zu finden, die dem System

$$a^2 r^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), \quad b^2 r^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \right)$$

genügen und die Bedingungen

$$\lim_{t=0+} u_1(r, t) = k_1, \quad \lim_{t=0+} u_2(r, t) = k_2, \quad \lim_{r=l-0} u_2(r, t) = f(t),$$

$$\lim_{r=m-0} u_1(r, t) = \lim_{r=m+0} u_2(r, t), \quad \lim_{r=m-0} K_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \lim_{r=m+0} K_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

befriedigen ( $a^2, b^2, l, m, k_1, k_2, K_1, K_2$  sind Konstanten,  $f(t)$  ist eine totalstetige Funktion). Verf. beweist durch die Methode der Integralgleichungen die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung.

G. Cimmino (Napoli).

Opatowski, Isacco: **Sulle linee di forza dei potenziali Newtoniani simmetrici**. Nota II. Atti Accad. Sci. Torino 68, 359—363 (1933).

Aus den früheren Untersuchungen des Verf. über achsensymmetrische harmonische Funktionen (Atti Accad. Sci. Torino 68, 135—146; dies. Zbl. 7, 210—211) ergeben sich einige Formeln (die man sonst in direkter Weise bestätigen kann) für Besselsche, Kugel- oder im allgemeinen solche Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen.

G. Cimmino (Napoli).

Michlin, S.: **Le problème biharmonique fondamental à deux dimensions**. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 608—610 (1933).

Es wird das biharmonische Problem für mehrfach zusammenhängende Bereiche gelöst durch Zurückführung auf zwei Fredholmsche Gleichungen im Anschluß an die Methode von Muschelišvili.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Tschen, Why: **Über den Grenzübergang von der Wellengleichung in die Wärmeleitungsgleichung**. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr 46, 365—370 (1933).

In der hyperbolischen Differentialgleichung  $u_{xx}^{(i)} - \alpha_i u_{tt}^{(i)} - u_i^{(i)} = 0$  ( $\alpha_i > 0$  konstant,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$ ,  $u^{(i)}(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t^{(i)}(x, 0) = g(x)$ ) wird der Grenzübergang  $i \rightarrow \infty$

vorgenommen, und zwar ohne die explizite Lösbarkeit zu benutzen. Die Lösungen

$u^{(i)}(x, t)$  konvergieren in einer Umgebung von  $t = 0$  gleichmäßig. Dort ist auch  $|u_x^{(i)}|$ ,  $|u_t^{(i)}|$ ,  $|u_{xx}^{(i)}|$ ,  $|u_{tx}^{(i)}|$  gleichmäßig beschränkt, während  $|u_{tt}^{(i)}|$  nur für  $t \geq \varepsilon > 0$  beschränkt bleibt. Als Hilfsmittel wird folgender Satz über die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen benützt: Es sei  $u(x)$  Lösung von

$$\alpha_i(x) u^n + \beta_1(x) u^{n-1} + \beta_2(x) u^{n-2} + \dots + \beta_n(x) u = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

und es sei gleichmäßig in  $x \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i(x) = 0$ , während  $|f_i(x)|$  und  $|f_i'(x)|$  glm. beschränkt bleibt. Außerdem sei  $\alpha_i(x) > 0$  und  $\beta_1(x) > 0$ , und es sei  $u^{n-1}(0)$ ,  $u^{n-2}(0)$ ,  $\dots$ ,  $u(0)$  von  $i$  unabhängig. Dann bleiben (unter gewissen Voraussetzungen über  $\alpha_i(x)$ ) in einer Umgebung von  $x = 0$  die Funktionen

$$|u(x)|, \quad \left| \frac{du}{dx} \right|, \dots, \left| \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \right|$$

glm. beschränkt, während  $\left| \frac{d^n u}{dx^n} \right|$  nur für  $x \geq \varepsilon > 0$  beschränkt bleibt. — Die Arbeit enthält eine Reihe von Unkorrektheiten. Rellick (Göttingen).

### Spezielle Funktionen:

**Bateman, H.:** Some properties of a certain set of polynomials. Tôhoku Math. J. 37, 23—38 (1933).

Die durch den Differentialprozeß  $F_n(D)$  sech  $x = \text{sech } x \cdot P_n(\text{tgh } x)$  ( $P_n$  das  $n$ -te Legendre-Polynom) definierten Polynome  $F_n(z)$  besitzen die erzeugende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) t^n = (1-t)^z F\left(\frac{1+z}{2}, \frac{1+z}{2}; 1; t^2\right),$$

wo  $F(\alpha, \beta; \gamma; \tau)$  die hypergeometrische Funktion bedeutet. Verf. untersucht systematisch die Eigenschaften dieser Polynome, ihre Darstellbarkeit durch bestimmte Integrale, durch Interpolationsreihen usw. Es werden ferner Rekursionsformeln für sie aufgestellt. Schließlich gibt er besondere Entwicklungen an, welche diese Polynome und die Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art enthalten. Szegő.

**Shabde, N. G.:** „On some series and integrals involving associated Legendre functions.“ Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 23—30 (1933).

Reihenentwicklungen für  $P_n^m(\cosh \sigma)$ ,  $Q_n^m(\cosh \sigma)$ , für einige Integrale, die  $P_n^m(z)$  enthalten, und für  $\int_{-1}^{+1} Q_n^3 dz$ . R. Schmidt (Kiel).

**Milne-Thomson, L. M.:** Two classes of generalized polynomials. Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 514—522 (1933).

The author defines the “ $\Phi$ -polynomial”,  $\Phi_\nu^{(n)}(x)$ , of degree  $\nu$  and of order  $n$ , and the “ $\Phi$ -number”  $\Phi_\nu^{(n)}$ , of order  $n$ , by means of the relations resp.

$$f(t, n) e^{x t + g(t)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \Phi_\nu^{(n)}(x) \quad (1); \quad f(t, n) e^{g(t)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \Phi_\nu^{(n)} \quad (2),$$

i. e.  $\Phi_\nu^{(n)} = \Phi_\nu^{(n)}(0)$  ( $n$  = positive, eventually negative, integer). — (1) yields the fundamental symbolic relations:

$$\Phi_\nu^{(n)}(x + y) = (x + \Phi_\nu^{(n)}(y))^\nu, \quad \Phi_\nu^{(n)}(x) = (x + \Phi_\nu^{(n)})^\nu$$

(replace, after expansion, each exponent, zero included, by the corresponding suffix).

The operations  $\frac{du}{dx}$ ,  $\int u dx$ ,  $\Delta u = u(x+1) - u(x)$ ,  $\nabla u = \frac{1}{2} \{u(x+1) + u(x)\}$  are then applied to  $\Phi_\nu^{(n)}(x)$ . Also relations are given between polynomials of different orders. By specifying  $f(t, n)$  and  $g(t)$  in (1, 2), two especially interesting classes of polynomials are derived. — 1° The “ $\beta$  polynomials”  $\beta_\nu^{(n)}(x)$ . They correspond to  $f(t, n) = t^n/(e^t - 1)^n$ . With  $g(t) \equiv 0$ , this leads to the generalized (Nörlund) Bernoulli polynomials  $B_\nu^{(n)}(x)$  and Bernoulli numbers  $B_\nu^n$ . Taking  $g(t) \equiv -\frac{1}{2}t^2$ , we obtain what



we call Hermite polynomials and Hermite numbers of order  $n$ , so that the ordinary Hermite polynomial  $H_\nu(x)$  is nothing but  $\beta_\nu^{(0)}(x)$ . — 2° The “ $\eta$  polynomials”  $\eta_\nu^{(n)}(x)$ . They correspond to  $f(t, n) = 2^n/(e^t + 1)^n$ . Taking here  $g(t) \equiv 0$ ,  $-\frac{1}{2}t^2$ , we are led resp. to the generalized (Nörlund) Euler polynomials  $E_\nu^{(n)}(x)$  and to what the author calls Hermite polynomials of order  $n$ , of the second kind. *J. Shohat.*

**Bell, E. T.:** The latin square, or cyclic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 734—745 (1933).

Eine Verallgemeinerung der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen gemäß dem folgenden Gedanken: Es sei

$$P(\alpha) = \alpha^r + c_1 \alpha^{r-1} + \dots + c_r$$

ein im rationalen Gebiet irreduzibles Polynom vom Grade  $r$ ,  $\alpha$  eine Nullstelle dieses Polynoms; dann werden durch die Gleichung ( $s$  eine ganze Zahl):

$$e^{\alpha s x} = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha^j f_j \left( \frac{x}{s} \right)$$

eindeutig Funktionen  $f_j \left( \frac{x}{s} \right)$  festgelegt. Ist  $\Phi_j(n)$  die Lösung der Differenzengleichung

$$\Phi(n+r) + c_1 \Phi(n+r-1) + \dots + c_r \Phi(n) = 0,$$

mit den Anfangswerten  $\Phi_j(\kappa) = 0$  für  $j \neq \kappa$ ;  $\Phi_j(j) = 1$ , ( $j, \kappa = 1, \dots, r-1$ ), so ergibt sich für die Funktionen  $f_j$  die Entwicklung

$$f_j \left( \frac{x}{s} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_j(s n) \frac{x^n}{n!}.$$

Der Verf. zeigt, daß diese Funktionen gewissen Differentialgleichungen  $r$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten genügen, daß ferner die Ableitungen, ähnlich wie im Fall der trigonometrischen Funktionen durch die Funktionen  $f_j$  selber linear darstellbar sind:

$$\frac{d^i}{dx^i} f_k \left( \frac{x}{s} \right) = \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_k(s t + j) f_j \left( \frac{x}{s} \right)$$

und daß algebraische Additionstheoreme bestehen:

$$f_j \left( \frac{x+y}{s} \right) = \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} \Phi_j(p+k) f_p \left( \frac{x}{s} \right) f_k \left( \frac{y}{s} \right).$$

Speziell wird der Fall, daß die Koeffizienten  $\Phi_j(n)$  periodisch sind, behandelt. Die Untersuchung wird sodann auf den Fall mehrerer Variablen ausgedehnt und demgemäß Funktionen  $L_j(x_1, \dots, x_r)$  durch die Gleichung

$$e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r} = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha^j L_j(x_1, \dots, x_r)$$

eingeführt. Diese Funktionen genügen gewissen linearen partiellen Differentialgleichungen; ebenso gelten analoge Beziehungen für die Ableitungen und analoge Additionstheoreme wie für eine Variable. Für den Fall  $P(\alpha) = \alpha^r - 1$  ergeben die  $f \left( \frac{x}{1} \right)$  Funktionen, die von Olivier [Crelles J. **2** (1827)] und die  $L_j$  Funktionen, die von Appel [C. R. Acad. Sci., Paris **84** (1877)] bereits behandelt wurden. *Lüneburg (Göttingen).*

**Opatowski, I.:** Sulle funzioni biarmoniche, come prodotti analoghi ai prodotti di Lamé, e sulle linee di forza dei campi Newtoniani. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 1049—1054 (1933).

Es seien  $q_1, q_2, q_3$  die auf Krümmungslinien bezogenen Parameter eines dreifachen Orthogonalsystems,  $V = F_1(q_1) \cdot F_2(q_2) \cdot F_3(q_3)$  eine harmonische Funktion. Man setze  $W = F'_1 \cdot F'_2 \cdot F'_3$ . Dann steht die Schar  $W = \text{konst.}$  senkrecht zu  $V = \text{konst.}$ ; für die Funktionen  $W$  und  $F''_x$  werden einige einfache Differentialbeziehungen abgeleitet, insbesondere die Gleichung  $\Delta \Delta W = 0$ . *Willy Feller (Kopenhagen).*

**Mehrotra, Brij Mohan: Definite integrals involving self reciprocal functions.** Bull. Calcutta Math. Soc. **24**, 163—176 (1933).

The main theorem of the paper is as follows: If  $f(x)$  is its own  $J_\mu$  transform and  $\kappa(x)$  is its own  $J_\nu$  transform then the function  $x^{-\frac{1}{2}} F(x) = \int_0^\infty \kappa(y) f(xy) dy$  is such that the  $J_\mu$  transform of  $x^{-\frac{1}{2}} F(x)$  is equal to the  $J_\nu$  transform of  $x^{-\frac{1}{2}} F(1/x)$ . The author shows that some results by previous authors can be obtained from this theorem and others, similar ones. Finally some applications are shown to derive solutions of the integral equation  $f(x) = \int_0^\infty (xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy) f(y) dy$ . J. D. Tamarkin.

### Funktionalanalysis:

**Hostinsky, B.: Sur une équation fonctionnelle qui se présente dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du type hyperbolique.** C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 733—735 (1933).

Die Funktionaltransformation  $f_1(y) = f(y) + h \int_0^y A(\xi, y, y_0) f(y_0) dy_0 + hb(\xi, y) f(y)$

wende man  $n$  mal hintereinander an mit den Werten  $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$ , die das Intervall  $(x_0, x)$  einteilen. Läßt man  $n$  unendlich anwachsen, so entsteht in der Grenze eine Transformation der Form

$$f_1(y) = f(y) + h \int_0^y \Phi(x, y, x_0, y_0) f(y_0) dy_0.$$

Aus dieser noch von willkürlichem  $A$  abhängigen Funktion  $\Phi$  kann eine Lösung derjenigen Funktionalgleichung gewonnen werden, der die Riemannsche Funktion einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung bei zwei Veränderlichen genügt.

K. Friedrichs (Braunschweig).

**Riesz, Friedrich: Über Sätze von Stone und Bochner.** Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 184—198 (1933).

Der Satz von Stone, daß jede Gruppe unitärer Transformationen  $U_t$  eine Spektralzerlegung (1)  $U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda$  besitzt, wird zurückgeführt auf den Satz von Bochner: Eine Funktion  $p(t)$  besitzt genau dann eine Darstellung (2)  $p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dV(\lambda)$  mit monotonem  $V(\lambda)$ , wenn  $p(t)$  stetig ist und wenn stets  $\sum_{\mu, \nu} p(t_\mu - t_\nu) \varrho_\mu \bar{\varrho}_\nu \geq 0$  ist. (Diese Zurückführung ist ähnlich der von Bochner selbst gegebenen, aber unabhängig entstanden.) Der Bochnersche Satz selbst wird bewiesen unter der abgeschwächten Voraussetzung, daß  $p(t)$  nur meßbar zu sein braucht, damit fast überall die Darstellung (2) besteht. — Zum Beweise wird zunächst die Bedingung (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t-s) \varrho(t) \bar{\varrho}(s) ds dt \geq 0$  gewonnen. Sodann wird gezeigt, daß die Operation  $A(h) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) h^*(-t) dt$  mit  $h^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda$  distributiv, positiv und beschränkt ist. Das ermöglicht leicht eine monotone Funktion  $V$  zu finden, so daß  $A(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) dV(\lambda)$  wird, woraus dann fast überall (2) folgt. Zum Beweise des Satzes von Stone wird, was möglich ist, da (3) erfüllt ist,  $p(t) = (U_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dV(\lambda, f)$  gesetzt und aus  $dV(\lambda, f) = (E_\lambda f, f)$  die Transformation  $E_\lambda$  gewonnen. Sodann wird die Transformation

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) dE_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} k^*(-t) U_t dt$$



eingeführt, für die  $K_1 K_2 = K_3$  aus  $k_1(\lambda) k_2(\lambda) = k_3(\lambda)$  folgt. Mit  $k(\lambda) = 1$  bzw. 0 bei  $\lambda < \mu$  bzw.  $\geq \mu$  entsteht  $K = E_\mu$ ; es erweist sich  $E_\mu$  leicht als Spektralschar und zugleich ergibt sich (1). K. Friedrichs (Braunschweig).

**Fejér, Leopold:** On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation, and of mechanical quadratures. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 521—534 (1933).

Übersicht einiger Resultate grundlegender Art aus den folgenden Gebieten: 1. Fouriersche Reihen, 2. Laplacesche Reihen, 3. Interpolation, 4. Mechanische Quadratur. Der leitende Gesichtspunkt ist die Auffindung sog. positiver Funktionaloperationen  $A[f]$ , d. h. von Operationen, für welche  $A[f] \geq 0$  ist, wenn nur  $f \geq 0$ . — Zu 1. Es sei  $f$  auf dem Einheitskreis  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ( $L$ )-integrabel. Die arithmetischen Mittel (a. M.) 1-ter Ordnung der zu  $f$  gehörigen Fourierschen Reihe (an irgendeiner Stelle) liefern positive Operationen, nicht aber die a. M. 0-ter Ordnung (d. h. die Teilsummen selbst). — Zu 2. Es sei  $f$  auf der Einheitskugel  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ( $L$ )-integrabel. Die a. M. 2-ter Ordnung der zu  $f$  gehörigen Laplaceschen Reihe (an irgendeiner Stelle) liefern positive Operationen, nicht aber die a. M. 0-ter und 1-ter Ordnung. — Zu 3. Es sei  $f$  in  $(-1, +1)$  definiert. Bei gewisser Verteilung der Interpolationsstellen  $x_k$  aus  $(-1, +1)$  liefert das Polynom  $(2n-1)$ -ten Grades, das an diesen Stellen mit  $f$  übereinstimmt und eine verschwindende Ableitung besitzt (Treppenspolynom), an irgendeiner Stelle von  $(-1, +1)$  genommen, eine positive Operation. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür wird angegeben. Sie ist im Falle der Tschebyscheffschen und Gaußschen Abszissen erfüllt. Auch gewisse andere Jacobische Abszissen erfüllen diese Bedingung. — Zu 4. Das Integral des zu  $f$  und zu den Stellen  $x_k$  gehörigen Lagrangeschen Interpolationspolynoms über  $(-1, +1)$  liefert bei gewisser Verteilung der  $x_k$  eine positive Operation. Für die Gaußschen Abszissen ist dieses Resultat klassisch. Für gewisse andere (Jacobische) Abszissen ist dies erst neuerdings durch den Verf. bekannt geworden. — Zu 1. sei ergänzend bemerkt: Die a. M. 3-ter Ordnung der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\theta$  sind (mit Ausnahme des allerersten) für  $0 < \theta < \pi$  positiv. Für die a. M. 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung ist dies nicht der Fall. Weiter sind die a. M. 2-ter Ordnung von  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin (2n+1)\theta$  in  $0 < \theta < \pi$  positiv; für die a. M. 0-ter und 1-ter Ordnung trifft dies nicht zu. Auch diese Sätze liefern gewisse wichtige positive Operationen. — Folgen von positiven Operationen besitzen besonders einfache Konvergenzeigenschaften. — Die meisten angeführten Ergebnisse rühren vom Verf. her. *Szegő*.

**Michal, A. D., et A. H. Clifford:** Fonctions analytiques implicites dans des espaces vectoriels abstraits. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 735—737 (1933).

Michal kündigt den Satz an von der Umkehrung analytischer Funktionaloperationen  $y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)$  — (die Definition der analytischen Funktionaloperation stammt im wesentlichen von Fréchet). Falls  $p_1(x)$ , d. h. das lineare Glied, eine umkehrbare „lösbare“ Funktionaloperation darstellt, ist die analytische Umkehrung  $x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)$  eindeutig bestimmt. Der Satz gilt unabhängig davon, ob in dem zugrunde gelegten linearen, normierten und vollständigen Räume die Multiplikation durch komplexe Zahlen besteht oder nur eine solche durch reelle Zahlen. — Die weiteren Sätze der beiden Verff. beziehen sich auf analytische Funktionaloperationen  $f(x, y)$  zweier und mehrerer abstrakter Veränderlichen. Sie gelten aber nur in Räumen mit komplexer Multiplikation. Insbesondere wird der Satz von der Existenz der impliziten analytischen Funktionaloperation  $y = \varphi(x)$  von  $f(x, y) = 0$  unter passenden Voraussetzungen ausgesprochen. Ähnliches gilt für Funktionaloperationen  $f(x, y, u) = 0$ , welche noch von einem abstrakten Parameter abhängig sind. *Schauder* (Lwów).

## Variationsrechnung:

McShane, E. J.: Über die Unlösbarkeit eines einfachen Problems der Variationsrechnung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr 45, 359—364 (1933).

Im Hinblick auf einen Existenzsatz des Autors (Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations. Ann. Scuola norm. super. Pisa 1934 wird hier die Unerläßlichkeit gewisser Voraussetzungen gezeigt, die dort gemacht wurden. Es wird bewiesen: „Sei die positive Funktion  $\varphi(x, y)$  samt ihren partiellen Ableitungen für alle  $(x, y)$  in einer Menge  $A$  stetig. Sei  $P_0(x_0, y_0)$  ein innerer Punkt von  $A$ , in dem die Ungleichung  $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$  gilt. Dann gibt es Punkte  $P_1$  derart, daß in der (nicht leeren) Klasse aller absolut stetigen Kurven deren zugehörigen

Kurven die Punkte  $P_0$  und  $P_1$  verbinden, das Problem  $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{Min.}$  keine Lösung besitzt.“ Rellich (Göttingen).

Kantorovič, L.: Sur une méthode directe de la solution approximative du problème du minimum d'une intégrale double. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 5, 647—652 (1933) [Russisch.]

The function  $u(x, y)$  minimizing an integral

$$I(u) = \int_D [a(\partial u / \partial x)^2 + b(\partial u / \partial y)^2 + cu^2 + 2fu] dx dy$$

for given boundary values is approximated by the following device: On the portions of abscissas  $y_1, \dots, y_n$  lying in the region  $D$  arbitrary functions  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  are defined. By interpolation a continuous function  $\bar{u}(x, y)$  is constructed which reduces to  $f_i$  on the line  $y = y_i$  and to the given boundary values on all except vertical segments of the boundary, and which is a polynomial in  $y$  for fixed  $x$ . The  $f_i$  are then chosen to minimize  $I(\bar{u})$ ; this requires minimizing a single integral. For these minimizing  $f_i$  the corresponding  $\bar{u}$  approximates the function minimizing  $I(u)$ . An example is considered. For regions  $D$  not consisting of a finite number of rectangles the functions  $f_i$  do not seem to determine  $\bar{u}$  uniquely. Equations 4 and 5 seem inexact except for rectangles, but the error is easily remedied.

E. J. McShane (Princeton, N. J.).

Holl, D. L.: Approximate solutions of two-dimensional elastic problems. Iowa State Coll. J. Sci. 7, 387—395 (1933).

Bei dem Variationsproblem  $\iint_R \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy = \text{Min}$  werden die Randbedingungen  $w = f(s)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n} = g(s)$  ersetzt durch

$$\int_{\Gamma} [w - f(s)] p_i(s) ds + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial w}{\partial n} - g(s) \right] q_i(s) ds = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

entsprechend einer Methode von Trefftz. Differentialgleichungen und Randbedingungen des veränderten Problems werden aufgestellt. K. Friedrichs (Braunschweig).

Myers, Sumner Byron: Sufficient conditions in the problem of the calculus of variations in  $n$ -space in parametric form and under general end conditions. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 746—760 (1933).

The author gives a set of conditions relating to an arc  $g: x_i = \bar{x}_i(t)$ , and a set of parameter values  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = (0, \dots, 0)$ , which ensure that this arc  $g$  and set  $(\alpha)$  furnish a minimum to the expression

$$J = \int F(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) dt + \theta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

among sets  $(\alpha)$  near  $(0)$  and admissible arcs neighboring the arc  $g$  with end-points determined by the sets  $(\alpha)$  by means of functions  $x_i^1 = x_i^1(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ,  $x_i^2 = x_i^2(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ . This set of sufficient conditions may be stated as follows: I) the arc  $g$  is an arc of an extremal without multiple points, which with the set  $(\alpha) = (0)$  satisfies the transversality conditions  $F_{x_i} x_i \alpha_n + \theta_{\alpha_n} = 0$ ; II) the arc  $g$  satisfies the strengthened Legendre and Weierstrass conditions; III) there are no negative characteristic values



for a certain boundary value problem associated with the second variation, and the only characteristic solutions for the characteristic value  $\sigma = 0$  have the form  $\eta_i = \varrho(t) \tilde{x}'_i(t)$  and vanish at both ends of the interval. The non-tangency hypothesis usually introduced in problems with variable end-points is not used by the author. The special case of fixed end-points requires slight modifications in the course of the proofs.

L. M. Graves (Chicago).

### Funktionentheorie:

**Fédoroff, V. S.:** Sur le théorème de Morera. Rec. math. Moscou **40**, 168—178 u. franz. Zusammenfassung 178—179 (1933) [Russisch].

The main result of this paper is as follows. Let  $f(z)$  be single-valued and integrable over the area of an open and connected domain  $D$  of the complex variable  $z$ . Suppose that there exists in  $D$  a set of simple closed curves  $(C)$  (each consisting of a finite number of continuous arcs with a continuously turning tangent) such that  $(C)$  contains curves  $C$  of arbitrarily small diameter and that every curve which is in  $D$  and which is obtained by translating a curve of  $(C)$ , is also in  $(C)$ . If the line integral  $\int_C f(z) dz$  extended over

curves  $C$  of  $(C)$  whenever it exists is equal to zero, then  $f(z)$  is equivalent to a function which is holomorphic in  $D$ . It is shown by an example, that the conclusion of the theorem is not valid if we omit the condition of existence in  $(C)$  of curves of arbitrarily small diameter, for instance when the set  $(C)$  consists of all circumferences of a fixed radius, which are in  $D$ , even if we assume that  $f(z)$  is continuous. J. D. Tamarkin.

**Zygmund, A.:** On continuability of power series. Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 80—84 (1933).

L'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème d'après lequel „presque toutes“ les suites  $\{\varepsilon_n\}$  avec  $\varepsilon_n = \pm 1$  sont telles que le cercle de convergence est, pour  $\sum \varepsilon_n a_n z^n$ , une coupure [voir Paley et Zygmund, Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 190—205 (1932); ce Zbl. **6**, 198]. La démonstration s'inspire de celle qu'a donnée M. Steinhaus à un théorème où les  $\varepsilon_n$  sont complexes [Math. Z. **31**, 408—416 (1929)].

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Kössler, M.:** Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen. Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême **1932**, Nr 5, 1—7 (1933).

Es sei  $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  für  $|z| < 1$  regulär und schlicht. Dann gilt nach Bieberbach  $|a_2| \leq 2$  und  $|a_3^2 - a_2| \leq 1$ . In ähnlicher Weise wie R. Nevanlinna aus der ersten Ungleichung die Bieberbachschen Schranken für  $|f'|$ ,  $|f|$ ,  $|\arg f'|$  gewinnt der Verf. aus der zweiten die folgenden beiden Abschätzungen

$$1 + \Re \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1 - |a_2| r - 6r^2 - |a_2| r^3 + r^4}{(1 - r^2)(1 + |a_2| r + r^2)}, \quad |z| = r \quad (1)$$

$$|\arg f'(z)| \leq 2 |a_2| r + \frac{3}{2} r \log \frac{1+r}{1-r}. \quad (2)$$

(1) ist scharf, d. h. die rechte Seite kann durch keine größere Funktion von  $r$  und  $|a_2|$  ersetzt werden. Aus (1) läßt sich u. a. die genaue Rundungsschranke in Abhängigkeit von  $|a_2|$  entnehmen. (2) ist nicht scharf, jedoch besser als die Bieberbachsche Schranke, teilweise sogar besser als die bisher bekannten (vgl. z. B. die in dies. Zbl. **2**, 400 besprochene Note des Verf.). Aus einer beim Beweis von (1) auftretenden Ungleichung lassen sich durch Integration die folgenden im obigen Sinne scharfen Abschätzungen herleiten

$$|f'(z)| \geq \frac{1 - r^2}{(1 + |a_2| r + r^2)^2}, \quad |f(z)| \geq \frac{r}{1 + |a_2| r + r^2},$$

von denen die zweite bekannt ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Grötzsch, Herbert:** Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **21/22**, 654—671 (1933).

Es sei  $\mathfrak{B}$  ein Bereich der  $z$ -Ebene, der die Punkte  $z = 0$  und  $z = \infty$  im Inneren enthält. Es sei ferner  $z_1$  ein dritter von 0 und  $\infty$  verschiedener Punkt von  $\mathfrak{B}$ . Betrachtet

wird die Gesamtheit der schlichten Abbildungen  $w = f(z)$  von  $\mathfrak{B}$ , die den Normierungsbedingungen genügen

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = \infty, \quad |f'(\infty)| = 1, \quad f(z_1) = w_1,$$

$w_1$  bedeutet einen weiteren von 0 und  $\infty$  verschiedenen festen Punkt. Die bisher üblichen Normierungen haben die Eigenschaft, daß aus jeder schlichten Abbildung des gegebenen Bereiches durch Zusammensetzung mit einer passenden linearen Transformation stets eine normierte Abbildung gewonnen werden kann. Dies ist bei der vom Verf. betrachteten Normierung nicht der Fall. Der Inhalt der Arbeit besteht in der Erledigung des Extremalproblems, unter den normierten Abbildungen, falls solche existieren — ein Kriterium hierfür wird auf Grund früherer Arbeiten des Verf. angegeben — diejenigen anzugeben, für die  $|f'(0)|$  ein Maximum bzw. Minimum wird. Sie sind stets eindeutig bestimmt und stellen neue interessante Typen von Abbildungen dar. Die Lösungen des Maximum- und Minimumproblems fallen nur dann zusammen, wenn der Bereich überhaupt nur eine einzige normierte Abbildung zuläßt. *Löwner*.

**Volkoff, D., et A. Nasaroff:** Sur un problème aux limites et son application à la théorie d'élasticité à deux dimensions. Rec. math. Moscou 40, 210—228 u. franz. Zusammenfassung 228 (1933) [Russisch].

The authors show that the fundamental plane problem of the theory of elasticity can be reduced to the problem of determination of two functions  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  analytic in the unit circle  $|z| \leq 1$  and satisfying, on the boundary of the circle, the condition

$$\sum_{j=1}^n [\alpha_j(\zeta) \varphi^{(j)}(\zeta) + \overline{\beta_j(\zeta)} \overline{\varphi^{(j)}(\zeta)}] + \gamma(\zeta) \psi(\zeta) + \overline{\delta(\zeta)} \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + ig(\zeta)$$

where  $\alpha_j(z)$ ,  $\beta_j(z)$ ,  $\gamma(z)$ ,  $\delta(z)$  are given functions analytic in  $|z| \leq 1$  except for a finite number of isolated singularities, and  $f(\zeta)$ ,  $g(\zeta)$  are given real-valued functions of  $\zeta = e^{i\theta}$ . The method developed by the authors leads to a system of infinitely many equations with infinitely many unknowns, which can be effectively solved in special cases, even for multiply-connected domains.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Grünberg, G. A.:** Über einige Näherungsformeln für elliptische Integrale erster und zweiter Gattung. Appl. Math. u. Mech. 1, 61—68 u. deutsch. Zusammenfassung 68—69 (1933) [Russisch].

Für manche praktischen Zwecke sind geschlossene Näherungsausdrücke für die elliptischen Funktionen erwünscht. Der Verf. gibt verhältnismäßig sehr einfache derartige Formeln für  $E(\sin \alpha, \varphi)$  und  $F(\sin \alpha, \frac{\pi}{2})$  an, z. B.:

$$E(\sin \alpha, \varphi) \approx \sin \varphi + (\varphi - \sin \varphi) \cos^{\frac{1}{2}} \alpha,$$

$$F(\sin \alpha, \frac{\pi}{2}) = K(\sin \alpha) \approx \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 10 \log \cos \alpha.$$

Diese Formeln wurden im wesentlichen auf empirischem Wege gewonnen. Der Vergleich mit den Tafeln zeigt, daß der Fehler die Größenordnung von 1% hat, oft darunter liegt. Die Genauigkeit ist also praktisch ausreichend. *Th. Zech* (Darmstadt).

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

**Khinchine, A.:** Über stationäre Reihen zufälliger Variablen. Rec. math. Moscou 40, 124—128 (1933).

Die Reihe der zufälligen Variablen  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  heißt stationär, wenn alle Variablen denselben Erwartungswert  $E(z_n) = a$  und dieselbe Streuung  $E(z_n - a)^2 = b$  haben, und wenn der Korrelationskoeffizient  $R(z_i, z_k)$  zwischen  $z_i$  und  $z_k$  eine Funktion  $R_{|i-k|}$  von  $|i-k|$  allein ist. In einer früheren Arbeit hat Verf. schon bewiesen, daß jede stationäre Reihe dem Gesetz der großen Zahlen unterliegt, d. h. daß die Mittelwerte

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = \bar{h}_n$$



der Bedingung

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} E(h_m - h_n)^2 = 0 \quad (1)$$

genügen. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. einen einfacheren Beweis von (1) und zeigt außerdem, daß die Konvergenz in (1) beliebig langsam sein kann. Man kann nämlich für eine beliebige gegen Null monoton abnehmende Funktion  $\psi(n)$  eine stationäre Reihe mit

$$R_n = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \cos \frac{2n}{s}, \quad \lambda_s = \psi(s-1) - \psi(s),$$

finden, und für eine solche Reihe gilt die Ungleichung

$$E(h_{n+q} - h_n) > \psi(n). \quad A. Kolmogoroff \text{ (Moskau).}$$

**Jordan, C.: Problema delle prove ripetute à più variabili indipendenti.** Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 351—368 (1933).

$E_1, \dots, E_{s+1}$  seien der Wiederholung fähige Ereignisse und  $p_1, \dots, p_{s+1}$  die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens. Für die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_{s+1}!} p_1^{\nu_1} \dots p_{s+1}^{\nu_{s+1}},$$

daß bei  $n$  Versuchen  $\nu_1$ -mal das Ereignis  $E_1$ ,  $\nu_2$ -mal das Ereignis  $E_2$  usw. auftritt, wird unter der Voraussetzung, daß  $\frac{\nu_i - n p_i}{\sqrt{n}}$  mit wachsendem  $n$  konvergiert, die Laplace-Bravaisische Näherungsformel auf die symmetrische Form gebracht:

$$P \propto \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^s p_1 \dots p_{s+1}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s+1} \frac{\xi_i^2}{n p_i}}.$$

Dabei ist  $\xi_i = \nu_i - n p_i$ .

Lüneburg (Göttingen).

**Bartlett, M. S.: Probability and chance in the theory of statistics.** Proc. Roy. Soc. London A 141, 518—534 (1933).

In the proposed distinction between probability and chance, it is assumed sufficient to say that the probability of a proposition or of an event  $a$ , dependent on a set data  $d$ , is the degree of rational belief in  $a$ , given  $d$ . It is proposed to restrict chance to a relatively objective type of probabilities. Thus, given a particular premiss, it may be possible to give to a probability a value with which every one readily agrees. The probability may then be said to be a chance. This distinction seems to involve an attempt to change a long established usage of two synonyms. It is shown that the fallacy of certain criticisms of Gauss's proof of the normal law arises from a lack of distinction between the chance of the observation, when the distribution of chance is assumed known, and, the probability of observations without this assumption. The paper considers the relations of the "optimum" and the "most probable value" to the sample, and discusses the nature of the method of maximum likelihood which consists in finding the values of parameters which will give the maximum chance to the observations we have. An attempt is made to show that exact arguments about chance are more fundamental as a mathematical basis of statistical theory and inference than the formulas of inverse probability.

H. L. Rietz (University of Iowa).

**Guldberg, Alf: Ist die normale Stabilität empirisch nachweisbar?** Tôhoku Math. J. 37, 127—132 (1933).

Die von Tschuprow [Nord. Stat. Tidskr. 1, 379 (1922)] aufgeworfene Frage nach der Möglichkeit, aus einer empirisch vorliegenden statistischen Reihe zu erschließen, ob dieser Reihe das stochastische Schema der normalen oder der übernormalen Stabilität zugrunde liegt, wird nach der vom Verf. in seinen Pariser Vorträgen (vgl. dies. Zbl. 6, 359) entwickelten Methode behandelt und an Zahlenbeispielen erläutert.

A. Khintchine (Moskau).

**Simonett, Johanna:** Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 28, 91—148 (1933).

Die KINGSche Methode [J. Inst. Actuar 42, 145 und 43, 109] zur mechanischen Ausgleichung statistischer Reihen wird hier ausführlich dargestellt und auf schweizerischen Bevölkerungs-, Sterblichkeits-, Heirats- und Geschlechtsverhältnis-Wahrscheinlichkeiten angewendet. Die Einleitung und der Gedankengang dieser Arbeit hat etwas Ähnlichkeit mit der (offenbar jedoch der Verf. unbekannten) Abhandlung von Knoll (dies. Zbl. 7, 171). Ausführliches Literaturverzeichnis. *Burrau.*

**Kermack, W. O., and A. G. McKendrick:** Contributions to the mathematical theory of epidemics. III. Further studies of the problem of endemicity. Proc. Roy. Soc. London A 141, 94—122 (1933).

In früheren Arbeiten der Verff. (vgl. dies. Zbl. 5, 305) wurde das Problem behandelt, in welcher Weise sich eine Volksmenge unter dem Einfluß einer Epidemie verändert. Die Theorie wurde dort unter gewissen in der Natur nicht zutreffenden Beschränkungen entwickelt, nämlich, daß 1. Todesfälle in der Bevölkerung nur durch jene Krankheit verursacht wurden und daß 2. das Alter der Individuen ohne Einfluß auf die Ansteckungs- und Gesundungsmöglichkeit sei. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie unter Aufhebung der ersten Beschränkung durchgeführt. Es zeigt sich, daß die früheren Resultate qualitativ erhalten bleiben. Wie die frühere, so enthält auch die neue Untersuchung vor allem die Aufstellung der Bedingungen, unter denen ein stationärer Zustand der Bevölkerung existiert und stabil ist, und ferner eine Kennzeichnung des Einflusses der Geburtsraten und der Zuwanderung auf die Krankheitsfälle. *Lüneburg (Göttingen).*

**Wisniewski, Felix Joachim de:** Les probabilités à structure héréditaire et la statistique moléculaire. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 12, 33—39 (1933).

Verf. betrachtet folgenden elementaren Spezialfall einer Markoffschen Kette. Jede der zufälligen Variablen  $x_0, x_1, \dots, x_r, \dots$  sei der Werte  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  fähig;  $Q_n^{(r)}$  sei die Wahrscheinlichkeit von  $x_r = E_n$  und  $Q_{n,k}$  bedeute die (von  $r$  unabhängig vorausgesetzte) Wahrscheinlichkeit derselben Gleichung unter der Bedingung  $x_{r-1} = E_k$ . Es wird angenommen, daß  $Q_{n,k}$  auch von  $k$  unabhängig ist, sofern nur  $k \neq n$  ist. Setzt man dementsprechend  $Q_{n,k} = \sigma_{n,n}$  für  $k \neq n$ , so ersieht man leicht, daß  $Q_{n,n} - \sigma_{n,n} = \tau$  von  $n$  unabhängig sein muß. (Verf. scheint das nicht bemerkt zu haben und postuliert diese Unabhängigkeit als neue einschränkende Voraussetzung.) Es läßt sich leicht beweisen, daß unter diesen Annahmen

$$Q_n^{(r)} = \frac{\sigma_{n,n}}{1-\tau} + \tau^r \left\{ Q_n^{(0)} - \frac{\sigma_{n,n}}{1-\tau} \right\}$$

ist. Es folgt ein wenig begründeter Übergang zu einer kontinuierlichen Folge zufälliger Variablen (einem stochastischen Prozeß) und einige Andeutungen über mögliche Anwendungen in der physikalischen Statistik. *A. Khintchine (Moskau).*

## Numerische und graphische Methoden.

**Lehmer, D. H.:** A photo-electric number sieve. Amer. Math. Monthly 40, 401—406 (1933).

Da für zahlentheoretische Untersuchungen die normalen Rechenmaschinen unzureichend sind, wurde eine neue Maschine konstruiert, die auf der Reduktion (mod  $p$ ) beruht. Zahnräder mit  $p$  Zähnen haben mit 0 bis  $p-1$  bezifferte Öffnungen, von denen alle bis auf die verschlossen werden, die Lösungen des reduzierten Problems darstellen. Sind die verschiedenen Zahnräder so angeordnet, daß die Öffnungen an einer Stelle hintereinanderliegen und treibt man alle Räder mit der gleichen Geschwindigkeit an, so wird eine Koinzidenz sämtlicher Öffnungen nach Umdrehungszahlen auftreten, die einer Lösung des Problems entsprechen (bei genügend großer Anzahl



Zahnräder, im vorliegenden Fall 30). Die Koinzidenzen werden mittels eines Lichtstrahles beobachtet, der auf eine Photozelle auftreffen und dadurch den Antriebsmotor ausschalten kann. Auf diese Weise wird eine sehr hohe Arbeitsgeschwindigkeit erreicht, die genaue Einstellung wird schließlich durch Einstellung von Hand erreicht. Als Beispiel wurde die Faktorenzersetzung von  $2^{79} - 1$  in  $2687 \cdot 202029703 \cdot 1113491139767$  durchgeführt. Die Maschine erreicht erst nach rund  $2,5 \cdot 10^{48}$  Umdrehungen ihre Ausgangsstellung wieder, ihre Genauigkeit ist absolut, da nur die Zähnezahlen der Zahnräder und deren Umdrehungen das Ergebnis liefern und sie keine Ungenauigkeiten wie toter Gang usw. beeinflussen. *G. Koehler (Erfurt).*

**Shannon, Simon:** Fundamentals in the development of Woolhouse's formulae of approximate integration. Trans. Actuar. Soc. Amer. **33**, 92—115 (1932).

This paper presents a fuller and more general development of the Woolhouse formulae than is contained in the original paper, and gives an insight into a broader perspective from which the subject may be viewed. Let  $u_t$  denotes the function for which we are to find the integral  $\int_{-n}^m u_t dt$ , the  $t$  representing an interval of age estimated from an origin at the central age within the limits of integration. Then the Woolhouse formulae use special values  $u_a$  and  $u_{-a}$  of the function taken in pairs. In fact the formulae take the form

$$A(u_a + u_{-a}) + B(u_b + u_{-b}) + C(u_c + u_{-c}) + \dots$$

in which  $u, A, a, B, b, C, c$  are to be determined, where  $a, b, c, \dots$  are integers in descending order of magnitude, and  $a$  is not greater than  $n$ . — Woolhouse introduced certain "auxiliary qualities" in his analysis. The present paper gives a clear view of the manner in which these quantities arise, and shows that they are really essential functions for expressing the solution of the simultaneous equations involved in finding the  $A, B, C, \dots$  *H. L. Rietz (Iowa).*

**Nowakowski, Artur:** Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der Rechenmaschine. Z. angew. Math. Mech. **13**, 299—322 (1933).

Die numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung (vgl. dies. Zbl. **3**, 9 und **7**, 3) wird eingehend besprochen, namentlich der Fall, daß man bei der angenäherten Quadratur den Integranden direkt durch ein Lagrangesches Interpolationspolynom ersetzt. Die Arbeit enthält Fehlerabschätzungen und Konvergenzbetrachtungen von Iterationsfolgen, ferner auch Koeffiziententabellen, Rechenschemata und ein durchgeführtes Beispiel. *Nyström (Helsingfors).*

**Frank, M.:** Eine neue Methode graphischer Integration der Differentialgleichungen. Rec. math. Moscou **40**, 129—142 u. dtsh. Zusammenfassung 143 (1933) [Russisch].

Es wird eine bequeme Methode angegeben, nach der man aus der Funktionsleiter einer Funktion  $u' = \varphi(t)$  (Teilstriche für äquidistante  $t$ -Werte) näherungsweise die Leiter für deren unbestimmtes Integral  $u(t)$  erhält. Die Näherung entspricht der Anwendung der Trapezregel oder der Tangentenregel. Die  $u$ -Zuwächse werden aus  $\varphi$ -Ordinaten mit Hilfe von Geraden der festen Steigung 10 gezeichnet (besonderes Zeichendreieck). Zur Integration der Differentialgleichung  $u' = f(u, t)$  ersetzt man die  $u'$ -Leiter durch eine Schar von Kurven  $u' = f(u, t_i)$  mit äquidistanten Parameterwerten  $t_i$ . Verhältnismäßig einfach ist das Verfahren bei  $u' + P(t)u + Q(t) = 0$ ,  $u' = f(u)$ ,  $f(u) du = \varphi(v) dv$ ,  $u' = f(u) + \varphi(t)$  [Ballistik]. Es läßt sich auch auf Differentialgleichungen 2. Ordnung und Systeme ausdehnen. *Th. Zech.*

● **Prévost, Georges:** Tables de fonctions sphériques et de leurs intégrales pour calculer les coefficients du développement en série de polynomes de Laplace. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1933. XXXII, 268 S. Frcs. 80.—.

● **Prévost, Georges:** Tables et formules de fonctions sphériques et de leurs intégrales pour calculer les coefficients du développement en série de polynomes de Laplace. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1933. VII, 162 S. Frcs. 50.—.

● Lowry, H. V.: *Graphs of standard mathematical functions*. London: G. J. W. Pitman 1932. 57 S. 2/-.

Lidstone, G. J.: *Notes on orthogonal polynomials and their application to least-square methods of (1) fitting polynomial curves to data, (2) graduation by weighted means*. J. Inst. Actuar. 64, 128—159 (1933).

German sky, B.: *Über ein mechanisches Verfahren zum Ausgleich von Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Z. techn. Physik 14, 370—374 (1933).

Zur Lösung der Aufgabe, durch  $N$  Meßpunkte  $(x_\nu, y_\nu)$  die „beste“ Kurve einer  $n$ -parametrischen Vergleichskurvenschär ( $N > n$ ) zu legen, wobei die „beste“ Kurve nach der Methode der kleinsten Quadrate definiert sei, gibt Verf. ein instrumentelles Verfahren an. Im einfachsten Fall handelt es sich um Auffindung der besten durch die Meßpunkte gelegten Geraden  $y = a + bx$ ; die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der besten Parameterwerte  $\bar{a}, \bar{b}$ :

$$\sum_{\nu=1}^N [y_\nu - (\bar{a} + \bar{b} x_\nu)] = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^N [y_\nu - (\bar{a} + \bar{b} x_\nu)] x_\nu = 0$$

werden als Gleichgewichtsbedingungen von  $N$  parallelen in den Punkten  $(x_\nu, a + bx_\nu)$  an der materiellen starren Geraden  $y = a + bx$  angreifenden Kräften

$$P_\nu = c[y_\nu - (a + bx_\nu)]$$

gedeutet. Die Kräfte werden in einfachster Weise durch Gummibändchen realisiert, die zwischen den durch Stecknadeln markierten Meßpunkten und der durch eine Stricknadel oder einen Zelluloidstreifen materialisierten Geraden ausgespannt sind. Die Genauigkeit des Verfahrens läßt sich nach Angabe des Verf. leicht auf 1% und noch höher steigern. — Der Fall einer allgemeinen Vergleichskurvenschär  $y = F(x; a_1, a_2)$  läßt sich erledigen durch Abbildung der Schar auf die Geraden, gegebenenfalls erst nach Aufsuchung einer geeigneten angenäherten Schar. Auch der allgemeinste Fall  $n > 2$  ist, durch Anwendung des Verfahrens in Teilschritten und sukzessiver Näherung, prinzipiell ebenso zu behandeln.

S. Gradstein (Amsterdam).

Allecock, H. J.: *The mathematical transformation of the set-square-index nomogram*. Philos. Mag., VII. s. 16, 744—760 (1933).

Solche Nomogramme für 4 Variablen  $z_i$  werden allgemein besprochen, bei denen die Ablesung mittels eines verschiebbaren rechtwinkligen Linienkreuzes geschieht. Wenn das Kreuz die (i. a. krummlinigen) Skalen dreier Variablen  $z_1, z_2, z_3$  in gegebenen Punkten trifft, so bestimmt es auf der vierten Skala den zugehörigen Wert  $z_4$ . Denkt man sich die Skalen für  $z_1$  und  $z_2$ , welche von der einen Ablesegeraden geschnitten werden, um  $90^\circ$  gedreht, so bekommt man ein Nomogramm, bei welchem die Ablesung mittels zweier paralleler Geraden geschieht und das man als Vereinigung zweier Fluchtlinientafeln mit unendlichferner gemeinsamer Zapfenlinie betrachten kann. Allecock untersucht die projektiven Transformationen des Nomogramms und insbesondere die Möglichkeit, demselben eine rektanguläre Form zu geben, wenn die Intervalle der  $z_i$  bekannt sind.

Nyström (Helsingfors).

Völlm, E.: *Über Fluchtlinientafeln von Beziehungen nomographisch dritter und vierter Ordnung*. Comment. math. helv. 6, 118—128 (1933).

Wenn die Punkte dreier Kurven mit den Werten der drei Variablen  $z_1, z_2, z_3$  kotiert sind und solche Werte  $z_1, z_2, z_3$  einander zugeordnet werden, die in gerader Linie liegenden Punkten entsprechen, so besteht zwischen den  $z_i$  eine Beziehung, die durch eine „Fluchtlinientafel“ dargestellt ist. — Völlm untersucht nun mit einfacheren Mitteln, als das bisher geschehen ist, derartige Darstellungen von Beziehungen der „nomographischen Ordnung“ 3 und 4.



Ist  $f_1$  eine Funktion der Variablen  $z_1$ ,  $f_2$  eine (im allgemeinen davon verschiedene) Funktion der Variablen  $z_2$ ,  $f_{12}$  eine Funktion der beiden Variablen  $z_1$  und  $z_2$  usw. und sind  $a_0, \dots, c_3$  Konstanten, so lautet die allgemeinste Beziehung der „nomographischen (Total-) Ordnung“ 4

$(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) f_3 + (b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) g_3 + c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 = 0$ . Dieselbe ist der „nomographischen Ordnung“ 2 in bezug auf  $z_3$  und der nomographischen Ordnung 1 in bezug auf  $z_1$  und  $z_2$ , die Totalordnung ist die Summe der Ordnungen bezüglich der einzelnen Variablen. Die allgemeinste Beziehung 3. Ordnung ist

$$(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) f_3 + b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 = 0.$$

Beide Beziehungen sind durch Fluchtlinientafeln darstellbar. Im allgemeinen lassen sich die Skalen für  $z_1$  und  $z_2$  auf einem Kegelschnitt anbringen, während die dritte Skala auf einer anderen Kurve liegt, im Fall der Beziehung 3. Ordnung liegt sie auf einer Geraden. Verf. behandelt auch die wichtigsten Spezialfälle. *Nystrom.*

**Frank, M.: Kurvenlineale, die zu verschiedenen Konstruktionszwecken dienen können.** Appl. Math. a. Mech. 1, 70–76 u. dtsh. Zusammenfassung 76–77 (1933) [Russisch].

Kurvenlineale, die teils von der Kurve  $y_1 = \varphi_1(x)$ , teils von  $y_2 = \varphi_2(x) = f(\varphi_1(x))$  begrenzt werden ( $x, y$  sind Polar-, Bipolar- oder rechtwinklige Koordinaten), gestatten, zu einer Strecke  $y_1$  die Strecke  $y_2 = f(y_1)$  anzugeben. Behandelte Beispiele: Logarithmus einer Strecke, Logarithmus einer Summe,  $n$ -Teilung eines Winkels, ... Auch einige Beispiele für Kurvenlineale zur Konstruktion von Funktionen zweier Veränderlicher lassen sich angeben ( $y = m \sin x, y = mx, y = q^2/x$  usw.). *Th. Zech.*

## Geometrie.

**Kamiya, Hitosi: Concerning plane Menger curves.** Tôhoku Math. J. 37, 284–293 (1933).

Verf. untersucht den Zusammenhang zwischen den Punkten (ihrer Ordnung usw.) einer ebenen Kurve im Sinne von Menger und Urysohn und dem primendentheoretischen Verhalten des Komplements in diesen Punkten. Mit den gewonnenen Resultaten leitet Verf. Bedingungen her, damit eine ebene reguläre Kurve in eine Summe von endlichvielen (beliebig kleinen) Kontinua zerlegt werden kann, die zu je 2 höchstens einen Punkt gemein haben (Frage von Menger). *Nöbeling.*

**Hirakawa, Junkô: On a characteristic property of the circle.** Tôhoku Math. J. 37, 175–178 (1933).

Es werden die drei folgenden einfachen Kennzeichnungen des Kreises hergeleitet, die teilweise schon von Yanagihara [Sci. Rep. Tôhoku Univ. 4, 65–77 (1915)] auf anderem Wege gewonnen wurden: Bei je zwei Abschnitten (das sind die durch Sehnen abgeschnittenen Bereiche) eines Ovals, für die eine der drei Größen Sehnenlänge, Bogenlänge und Inhalt denselben Wert hat, möge auch eine der beiden anderen denselben Wert haben. Dann ist das Oval ein Kreis. Dies ergibt sich sehr einfach aus folgendem: Eine Kurve konstanter Breite, bei der jeder Durchmesser den Umfang (Inhalt) halbiert, ist ein Kreis, was durch Rechnung bestätigt wird. *W. Fenchel.*

**Takasu, Tsurusaburo: Beweis einer Verallgemeinerung der Steinerschen isoperimetrischen Ungleichung durch Fouriersche Reihen.** Sonderdruck aus: Tokyo Buturigakkô-Zasshi 3 S. 1933.

Es sei  $EV E'$  ein Winkel der Größe  $\alpha$  und  $C$  ein die Punkte  $E$  und  $E'$  seiner Schenkel verbindender Kurvenbogen von der Länge  $L$ . Ferner sei  $F$  der Flächeninhalt des von den Schenkeln  $VE, VE'$  des Winkels und von  $C$  begrenzten Bereichs. Dann gilt  $L^2 \geq 2\alpha F$  für  $0 < \alpha \leq \pi$ . Dies und eine etwas schwächere Ungleichung im Fall  $\alpha > \pi$  wird auf Hurwitzsche Weise durch Fourierentwicklung der Stützfunktion des Bogens bewiesen. *W. Fenchel (Kopenhagen).*

**Favard, J.: Sur les corps convexes.** J. Math. pures appl., IX. s. 12, 219–282 (1933). Die Arbeit beschäftigt sich mit zwei verschiedenen Problemkreisen aus der Theorie der konvexen Körper. — Im Kapitel 1 wird die von Minkowski (Theorie der kon-

vexen Körper, Ges. Abb. 2) für den dreidimensionalen Raum durchgeführte Klassifikation der Randpunkte und Stützebenen eines konvexen Körpers auf den  $n$ -dimensionalen Raum übertragen, und es werden die Minkowskischen Sätze über extreme Stützebenen und Tangentialebenen verallgemeinert. Es sei bemerkt, daß sich sehr weitgehende Resultate in dieser Richtung schon bei Steinitz [J. reine angew. Math. 146, 1—52 (1916)] finden. Haupthilfsmittel bei den Untersuchungen des Verf. sind Sätze über konvexe Strahlensysteme, das sind Mengen von Halbstrahlen, die von einem Punkt aus aufgetragen einen konvexen Kegel erfüllen. Hierbei ergibt sich auch ein Beweis des Satzes, daß durch jeden Randpunkt eines konvexen Körpers wenigstens eine Stützebene geht. — Kapitel 2 befaßt sich mit Verallgemeinerungen und Verschärfungen von Minkowskischen Ungleichungen zwischen gemischten Volumina, so wie mit der im allgemeinen schwierigen Diskussion des Gleichheitszeichens in diesen. Die Herleitung von Ungleichungen geschieht durch Verallgemeinerung von Methoden von Minkowski und Bonnesen auf den  $n$ -dimensionalen Raum. Die Verschärfung des Brunn-Minkowskischen Satzes durch Bonnesen (Les problèmes des isopérimètres et des iséiphanes, Paris 1929, Kapitel 6) liefert verschärfte Minkowskische Ungleichungen, in die außer gemischten Volumina der Körper auch Quermaße oder gemischte Quermaße (das sind Flächeninhalte oder gemischte Flächeninhalte von Orthogonalprojektionen der Körper auf Ebenen) eingehen. Aus einer solchen verschärften Ungleichung kann man für den Fall, daß in der entsprechenden unverschärften das Gleichheitszeichen gilt, Relationen zwischen den gemischten Volumina und gemischten Quermaßen der Körper für alle Projektionsrichtungen entnehmen. Man erhält so für das Eintreten der Gleichheit notwendige Bedingungen, die vom Verf. durch Einführung von „Differentialen gemischter Oberflächen“ statt der Quermaße in andere Gestalt gebracht werden. Derartigen Differentialen dürfte sich jedoch nur unter stark einschränkenden Voraussetzungen (Körper mit mehrmals differenzierbaren Stützfunktionen oder Polyeder) ein Sinn beilegen lassen. Immerhin erweisen sich diese Relationen als nützlich; es gelingt nämlich dem Verf. mit ihrer Hilfe die bekannte Minkowskische Kappenkörperbehauptung im Polyederfall zu bestätigen, worüber weiter unten berichtet wird. Von den Ergebnissen der Arbeit sei noch das folgende hervorgehoben: Die  $n - 1$ -te Wurzel aus der Oberfläche der Körper einer linearen Schar ist eine konkave Funktion der Scharparameter. Dies wird durch Verallgemeinerung des Beweises für den Fall  $n = 3$  von Bonnesen (a. a. O. S. 97ff.) bewiesen. Der Verf. fügt die Behauptung hinzu, daß diese  $n - 1$ -te Wurzel nur dann linear ist, wenn die die Schar erzeugenden Körper homothetisch sind. Die hierfür gegebene Begründung scheint dem Ref. jedoch nicht ausreichend. Man wird wohl die diesbezüglichen, etwas komplizierteren Überlegungen von Bonnesen (a. a. O. S. 100ff.) verallgemeinern müssen. — Kapitel 3 enthält die Aufklärung des Gleichheitsfalles in einigen spezielleren Ungleichungen. Im  $n$ -dimensionalen Raum sei der konvexe Körper  $\mathfrak{R}_1$  im konvexen Körper  $\mathfrak{R}_2$  enthalten. Dann gilt für die  $n + 1$  gemischten Volumina der beiden Körper

$$V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_n.$$

Es wird im Anschluß an Minkowskis Behandlung des Falles  $n = 3$  die notwendige und hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, daß  $V_0 = V_p$  für ein  $p$  mit  $0 < p < n$  gilt. Sie besteht darin, daß  $\mathfrak{R}_2$  ein „Tangentialkörper der Ordnung  $n - p$ “ von  $\mathfrak{R}_1$  ist. Dieser hier vom Verf. eingeführte Begriff ist die naturgemäße Verallgemeinerung der Minkowskischen Kappen- und Tangentialkörper (vgl. die genannte Arbeit von Minkowski). Ferner wird bewiesen, daß in der für die gemischten Volumina von zwei konvexen Körpern des dreidimensionalen Raumes gültigen Ungleichung  $V_1^2 \geq V_0 V_2$  das Gleichheitszeichen in den folgenden beiden Fällen nur dann gilt, wenn  $\mathfrak{R}_1$  zu einem Kappenkörper von  $\mathfrak{R}_2$  homothetisch ist. 1. Beide Körper sind Polyeder (über die Voranzeige dieses Resultats ist in dies. Zbl. 3, 75 berichtet worden). 2. Einer der Körper besteht aus einer ebenen Scheibe. Letzteres ist eine einfache Folge eines Satzes des Verf. über Mittelwertungleichungen (dies. Zbl. 7, 61—62). Für den Beweis



von 1. wird bemerkenswerterweise wesentlich ein topologischer Hilfssatz gebraucht, der eng verwandt ist mit einem Cauchyschen im Beweis der Starrheit der konvexen Polyeder.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Kubota, Tadahiko:** Eine Bemerkung zum Aiyarschen Satz über den orthopolaren Kreis. Tôhoku Math. J. 37, 409—413 (1933).

Es werden räumliche Analoga zum Aiyarschen Satze (dies. Zbl. 4, 361) und zu anderen mit diesem zusammenhängenden Sätzen gefunden. Dies gelingt durch geeignete Definition der polaren Kugel und des Orthozentrums eines Sechsecks, der orthopolaren Kugel einer Ebene  $\alpha$  in bezug auf ein Sechseck und der orthoptischen Kugel von drei konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Weiss.

**Kollros, L., et J. Marchand:** Sur une théorème de Steiner. Comment. math. helv. 6, 154—157 (1933).

Briefwechsel. L. Kollros teilt mit, er habe in einem Steinerschen Manuskript vom 27. XII. 1824 folgenden Satz gefunden: Auf einem Kreis liege ein Punkt  $A$  und  $n$  Punkte  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).  $ik$  ( $k = 1, \dots, n$ ) sei der Fußpunkt des von  $A$  auf die  $i$  mit  $k$  verbindende Sehne gefällten Lots. Dann liegen diese Punkte zu je dreien, wie  $ik, il, kl$ , auf Geraden ( $ikl$ ) ( $l = 1, \dots, n$ ). Ist  $ikl$  der Fußpunkt des von  $A$  auf ( $ikl$ ) gefällten Lots, so liegen diese Punkte wieder zu je vierten, wie  $ikl, ikm, ilm, klm$ , ( $m = 1, \dots, n$ ) auf Geraden ( $iklm$ ). So geht es weiter, bis man schließlich zu  $n$  Fußpunkten kommt, die auf einer Geraden liegen. — L. Kollros gibt einen der beiden von Steiner gegebenen Beweise an. Er beruht auf einem Induktionsverfahren, bei dem die Gültigkeit des Satzes für  $n - 2$  und für  $n - 1$  zum Beweis seiner Gültigkeit für  $n$  gebraucht wird. Für  $n = 3$  ist (123) die Simsongerade des Dreiecks 1, 2, 3 bzgl.  $A$ . Für  $n = 4$  ist (1234) die Scheiteltangente der Parabel, die dem Vierseit (123), (124), (134), (234) eingeschrieben ist. — Demgegenüber gibt J. Marchand einen Beweis mit denselben Methoden, wie sie bei den verwandten Sätzen von Miquel und Clifford angewandt werden, also mit den Methoden der algebraischen Geometrie. Cohn-Vossen.

**Kobayashi, Mikiwo:** Some geometric theorems on the application of complex numbers. Tôhoku Math. J. 37, 363—367 (1933).

In der Gaußschen Ebene ist ein variables Dreieck einem Kreise ein- und einem Kegelschnitt umbeschrieben. Bewiesen wird: Der Ort der Lemoinischen Geraden des Dreiecks ist ein Kegelschnitt. Der Neunpunktekreis des Dreiecks umhüllt zwei Kreise oder Geraden. — Bestimmung der Enveloppe einer beliebigen Kurve  $z = f(t)$  der Gaußschen Ebene, die sich auf einer ähnlichen Kurve bewegt:  $z = f(t) + k \cdot f(T)$  ( $k$  = komplexe Konstante). Die Bezeichnungen werden Tôhoku Math. J. 28, 46 (1927) erklärt.

E. A. Weiss (Bonn).

**Kojima, Shunji:** Synthetic proofs of Loud's theorems concerning  $n$  lines in a plane. Tôhoku Math. J. 37, 380—382 (1933).

The center of the circle touching 3 directed lines  $l_1, l_2, l_3$  is denoted by  $P_{123}$ . If there are given 4 directed lines the centers  $P_{123}, P_{124}, P_{134}, P_{234}$  lie on a circle  $C_{1234}$ . If there are 5 directed lines the centers of the circles  $C_{1234}, C_{1235}, C_{1245}, C_{1345}, C_{2345}$  lie on a new circle  $C_{12345}$ ; and so on indefinitely. This and other theorems on points and circles connected with  $n$  directed lines in the plane have been proved by Loud [Trans. Amer. Math. Soc. 1, 323 (1900)] by means of complex numbers. The author gives synthetic proofs, using results of Steiner, Miquel, Kantor, Pesci and Clifford.

Bottema (Groningen).

**Wiman, A.:** Über Mannigfaltigkeiten von ungeradem Typus. Ark. Mat. Astron. Fys. 23 A, Nr 26, 1—45 (1933).

Im reellen projektiven Raum werden Mannigfaltigkeiten betrachtet, welche durch Gleichungen der Form

$$\sum_1^k a_i \operatorname{sgn} x_i \cdot |x_i|^n = 0, \quad (1)$$

( $n$  reell) definiert werden. Die  $x_i$  sind entweder unabhängige Veränderliche oder durch eine lineare Relation verknüpft. Sind die  $x_i$  unabhängig, so hat die Mannigfaltigkeit (1) den Zusammenhang einer Hyperebene. Dasselbe gilt, wenn eine lineare Relation

$$\sum_1^k x_i = 0 \quad (2)$$

besteht, vorausgesetzt daß die  $a_i$  in (1) nicht alle dasselbe Vorzeichen haben. Sind aber alle  $a_i > 0$ , so wird  $a_i = c_i^{1-n}$  gesetzt und gezeigt, daß in jedem der Fälle  $n < 0$ ,  $0 < n < 1$  und  $n > 1$  der Zusammenhang der Mannigfaltigkeit nur von den  $c_i$  (nicht von  $n$ ) abhängt. Für  $\sum \pm c_i = 0$  kommt ein Doppelpunkt heraus. Zu jeder Mannigfaltigkeit (1) mit Exponenten  $n$  gibt es eine ebensolche mit Exponenten  $2 - n$ , welche aus der ersteren die parabolischen Punkte ausschneidet. Im Fall  $k = 4$ ,  $n > 2$  definieren (1), (2) eine Kurve von der reellen Ordnung 3 mit 3 Wendepunkten, bestehend aus einem unpaaren Zug und evtl. noch einer Ovale, letzteres für

$$c_2 + c_3 - c_4 < c_1 < c_2 + c_3 + c_4.$$

Für  $n < 0$  ist der topologische Zusammenhang derselbe; der unpaare Zug hat ebenfalls die Ordnung 3 und 3 Wendepunkte, während der evtl. paare Zug eine Ovale ist. Für  $0 < n < 2$  hat die Kurve i. A. eine Ordnung  $> 3$  und  $2f - 3$  Wendepunkte, wo  $f$  die Anzahl der Schnittpunkte mit dem Koordinatenvierseit ( $f = 4, 6, 8, 10$  oder  $12$ ) ist. — Im Falle  $k = 4$  definiert (1) eine Fläche, welche für  $n \geq 2$  die Ordnung 3 und für  $0 < n < 2$  mindestens die Ordnung 5 hat. Im Fall  $k = 5$  definieren (1) und (2) ebenfalls eine Fläche, welche für  $n \geq 2$  die Ordnung 3 oder 5 hat. Es ist Verf. nicht gelungen, allgemein zu entscheiden, wann die Ordnung 3 ist. Wohl hat er die Geraden auf diesen Flächen bestimmt und ihre Hessesche Fläche nach Verlauf und Zusammenhang genau untersucht. — Schließlich werden die Mannigfaltigkeiten von geradem Typus, die in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 7, 173) nur für  $n > 1$  behandelt werden, jetzt im Fall  $0 < n < 1$  betrachtet. Die Zusammenhangsverhältnisse sind in diesem Fall viel komplizierter als für  $n > 1$ . van der Waerden (Leipzig).

**Gourewitch, G. B.:** Sur une équation algébrique en polyvecteurs. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 220 (1933).

Generalization of the note C. R. Acad. Sci., Paris 192, 138 (1931) (see this Zbl. 1, 32). Conditions that the equations  $w_{[i_1 i_2 \dots i_k p]} = 0$ ,  $i_1, \dots, i_k, p = 1, \dots, n$  where  $w_{i_1 i_2 \dots i_k} = w_{[i_1 \dots i_k]}$  is a given  $k$ -vector and  $p_i$  an unknown vector, have  $s$  linearly independent solutions. The author mentions that he also has a method to find the solutions. For the demonstration is needed the necessary and sufficient condition that a  $k$ -vector be simple. Struik (Cambridge).

**Gourewitch, G. B.:** Sur les formes canoniques d'un trivecteur dans l'espace à six dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 384—385 (1933).

The author, referring to his notes C. R. Acad. Sci., Paris 192, 138 (1931) (see this Zbl. 1, 32) and 197, 220 (1933) (see the prec. ref. No. 2479) gives the classification of trivectors in six dimensions. He states that he has developed a method to perform actually the reduction to the normal forms. He remarks that in the case the trivector is of the form (notation of Cartan)  $[a b c] + [p q r]$ , there are real trivectors for which the vectors  $p, a, q, b, r, c$  form conjugate complex pairs. The shortness of the note does not make it possible to see in how far the results of the author have gone beyond those of Reichel, Diss. Greifswald, 1907, who also has the classification of trivectors in six dimensions, and Schouten, Circ. mat. Palermo Rend. 55, 137—156 (1931) (see this Zbl. 1, 354), who has, besides, the classification for seven dimensions. Struik (Cambridge).

**Gourewitch, G.:** Sur la divisibilité des trivecteurs et des quadrivecteurs par un vecteur. C. R. Acad. Sci., Paris 192, 138—139 (1931).

Conditions for  $s = 3$  and  $s = 4$  that the  $s$ -vector  $v_{i_1 i_2 \dots i_s} = v_{[i_1 i_2 \dots i_s]}$ ,  $i_1, i_2, \dots, i_s = 1, 2, \dots, n$  can be written in the form

$$v_{[i_1 i_2 \dots i_s]} = u_{[i_1 i_2 \dots i_{s-1} p_{i_s}]},$$



where neither  $u$  nor  $p$  are given in advance. As a result the author finds expressions for the two types of trivectors in six-space. He refers to his article in „Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis an der Staatsuniversität Moskau“ 1933, 143 (see. this Zbl. 7, 327). *Struik* (Cambridge).

**Demoulin, A.:** Sur quelques classes de congruences *W*. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 634—636 (1933).

Nouvelle détermination des surfaces qui correspondent à une surface donnée avec orthogonalité des éléments, et des congruences  $W$  qui ont une surface focale assignée; application à la formation des équations aux dérivées partielles dont dépendent diverses classes de surfaces (entre autres les surfaces  $R$ , et les deux nappes de la surface focale d'une congruence  $W$  dont les lignes de courbure se correspondent). *Beniamino Segre* (Bologna).

● **Bartel, Kazimierz:** Kotierte Projektionen. Deutsch hrsg. v. Wolfgang Haack. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1933. VI, 80 S. u. 71 Fig., geb. RM. 4.60.

Die Behandlung der kotierten Projektion in dem vorliegenden Buche unterscheidet sich von den Darstellungen desselben Gegenstandes in den größeren Lehrbüchern der darstellenden Geometrie durch die große Zahl vollständig ausgeführter, theoretischer und praktischer Übungsbeispiele. Das Buch ist dadurch besonders zum Selbststudium geeignet. Die Kapitelüberschriften lauten: I. Punkt, Gerade, Ebene; II. Raumkurven. Geradlinige Flächen; III. Anwendungen und Beispiele. IV. Topographische Flächen. *Erwin Kruppa* (Wien).

**Schmid, Wilhelm:** Über eine Zyklographie  $Z_4$ , die aus einem Hirstschen quadratischen Komplexe abgeleitet ist. S.-B. Akad. Wiss. Wien 142, 207—233 (1933).

Die in Rede stehende  $Z_4$  bildet einen beachtenswerten Sonderfall einer Komplexabbildung der Punkte des  $R_3$ , bei der jedem Raumpunkt die Spurkurve seines Komplexkegels auf einer Grundebene  $\Pi$  zugeordnet wird. Als abbildender Strahlkomplex wird hierbei ein Hirstscher quadratischer Komplex verwendet, der also zwei Strahlbündel enthält, und die Ebene  $\Pi$  geht durch die Scheitel dieser Bündel. Demnach sind die Bildkurven der Raumpunkte Kegelschnitte, die durch zwei Punkte gehen, oder für eine metrisch-spezielle Annahme die Kreise von  $\Pi$ . Im letzteren Falle ergibt sich der zu einem Raumpunkt  $P$  gehörige Bildkreis  $p^*$  mit Hilfe einer durch den Komplex bestimmten Kugel  $\kappa$ , deren Mitte in  $\Pi$  liegt, und zwar ist  $p^*$  der Hauptscheitelkreis des scheinbaren Umrisses von  $\kappa$  auf  $\Pi$  in dem Zentralriß aus dem Auge  $P$ . Jedem Kreis in  $\Pi$  entsprechen umgekehrt vier Raumpunkte, die paarweise zu  $\Pi$  symmetrisch liegen und deren Normalrisse auf  $\Pi$  bezüglich  $\kappa$  invers sind. Von den Grundeigenschaften dieser ein-vierdeutigen Abbildung seien folgende hervorgehoben: a) Die zu den Kreisen eines in  $\Pi$  befindlichen Kreissbüschels gehörigen Raumpunkte erfüllen eine zu  $\Pi$  symmetrische sphärische Raumkurve 4. O. 1. Art. b) Einem Kreisbündel in  $\Pi$  mit dem Orthogonalkreis  $q$  entspricht eine Drehfläche 2. Gr. mit  $q$  als Äquator und jenem im Komplex enthaltenen Drehkegel als Richtkegel, dessen Spurkreis auf  $\Pi$  zu  $q$  orthogonal ist. c) Die Bildkreise der Punkte einer Raumgeraden erfüllen eine der beiden nichtsingulären Schar von doppelberührenden Kreisen einer rationalen bizirkularen Kurve 4. O.  $z_4$ , deren Doppelpunkt in den Spurpunkt  $G$  dieser Geraden fällt. Umgekehrt kann jede solche Kreisschar als  $Z_4$ -Bild einer Raumgeraden gedeutet werden, und falls  $z_4$  in  $G$  eine Spitze hat, gilt dies auch für die singuläre Schar von doppelberührenden Kreisen. Für besondere Lagen der Geraden ergeben sich als  $z_4$  u. a. Pascalsche Kurven (auch Kardioiden), Lemniskaten (auch Bernouillische) und schließlich auch Kegelschnitte. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Erzeugungsweisen der  $z_4$  wird jedesmal auf Grund der Abbildung ausführlich erläutert. Weiter wird die Mannigfaltigkeit der Bildkreise der Punkte einer Ebene untersucht. — Ordnet man jedem Punkt des  $R_3$  den in seiner Polarebene bezüglich einer Kugel  $\kappa$  befindlichen Kreis von  $\kappa$  zu und wird diese Kugel auf eine Ebene  $\Pi$  stereographisch projiziert, so ergibt sich eine bekannte ein-eindeutige Abbildung  $Z_1$  des  $R_3$  auf die Kreise von  $\Pi$ , die nach einer Mitteilung von Th. Schmid (Wien) bereits von J. Thomae (Z. Math. Physik 1884) angegeben wurde. Es wird nun [analog wie in der gewöhnlichen Zyklographie, s. E. Müller-J. L. Krames, Die Zyklographie, S. 231 (1929)] die ein-vierdeutige Punktverwandschaft  $\mathfrak{S} = Z_1 \cdot Z_1^{-1}$  eingehend untersucht, bei der also jedem Raumpunkt  $\bar{X}$  jenes Punktquadrupel  $X$  zugewiesen wird, dessen Komplexbildkreis mit dem stereographischen Bild von  $\bar{X}$  zusammenfällt. Man sieht sofort, daß die Ebenen des Raumes ( $\bar{X}$ ) durch  $\mathfrak{S}$  in die unter b) erwähnten Drehflächen 2. Gr. des Raumes ( $X$ ) übergehen. Weiters wird gezeigt, daß die inverse Transformation  $\mathfrak{S}^{-1} = Z_1 \cdot Z_1^{-1}$  jede Gerade von ( $X$ ) in eine Ellipse und jede Ebene von ( $X$ ) in eine Steinersche Fläche 4. O. überführt. Auf Grund dieses Zusammenhangs werden schließlich die bekannten Eigenschaften dieser Fläche auf eine neue unmittelbar anschauliche Weise abgeleitet und verschiedene Aufgaben über die Steinersche Fläche, insbesondere die (sonst nicht einfache) Umrißermittlung konstruktiv durchgeführt. *J. L. Krames* (Graz).

## Algebraische Geometrie:

**Takami, Minoru:** Sur une propriété de la poloquartique de la quartique plane. Jap. J. Math. 10, 79—81 (1933).

D'après Kubota, on appelle poloquartique d'une droite  $u$  par rapport à une quartique plane  $C_4$  le lieu géométrique  $D_4$  des points dont la conique polaire touche la droite  $u$ . L'auteur donne un théorème concernant le cas où la droite  $u$  est tangente à la Hessienne. P. Dubreil (Paris).

**Meyer, W. Franz:** Algebraisch-arithmetische Eigenschaften der Charaktere einer ebenen algebraischen Kurve. Tôhoku Math. J. 37, 479—502 (1933).

Durch einfache Eliminationen werden aus den 4 Plückerschen Formeln 11 weitere Formeln gewonnen. Diese lassen sich dazu benutzen, die Plückerschen Charaktere ganz rational durch 3 ganzzahlige Charaktere auszudrücken. van der Waerden.

**Campbell, Alan D.:** Plane quartic curves in the Galois fields of order  $2^n$ . Tôhoku Math. J. 37, 88—93 (1933).

Die Kurven 4. Ordnung einer endlichen ebenen Geometrie über einem  $GF(2^n)$  unterscheiden sich in folgenden Punkten von den gewöhnlichen Kurven 4. Ordnung. Die Polare eines beliebigen Punktes hat eine Spitze. Aus einem allgemeinen Punkt der Ebene gehen nicht 12, sondern 6 Tangenten an die Kurve. Es gibt statt 28 nur 7 Doppeltangenten, nämlich die 6 Seiten und die Verbindungslinie der 3 Diagonale eines vollständigen Vierecks. Es werden einige Kovarianten der Kurve angegeben und einige speziellen Fälle (mit Doppelpunkt, Spitzen usw.) diskutiert.

van der Waerden (Leipzig).

**Kempner, Aubrey J.:** On the shape of polynomial curves. Tôhoku Math. J. 37, 347—362 (1933).

The author considers polynomial curves

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 > 0),$$

for which  $f'(x)$  has all roots  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) real and distinct. ( $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1}$ ). The problem is, to examine to what extent we may prescribe the order of magnitude in which the extremes are arranged, assumed that no two of the extremes have the same value. For  $n = 6$  (for example) the curve is called "of type (43152)" if

$$f(x_3) > f(x_5) > f(x_2) > f(x_1) > f(x_4);$$

in general a curve of degree  $n$  is called "of type  $(c_1 c_2 \dots c_{n-1})$ " ( $c_1 c_2 \dots c_{n-1}$  being a permutation of  $1, 2, \dots, n-1$ ), when  $c_i$  denotes the number which  $f(x_i)$  gets in the series  $f(x_{k_1}), f(x_{k_2}), \dots, f(x_{k_{n-1}})$ , where  $f(x_{k_1}) > f(x_{k_2}) > \dots > f(x_{k_{n-1}})$ . The maxima and minima of  $f(x)$  must alternate; therefore  $c_1 c_2 \dots c_n$  is not an arbitrary permutation, but such a one that  $c_1 > c_2, c_2 < c_3, c_3 > c_4$  etc. A recurrence relation is given for the number of possible types (e. g.  $N(3) = 1, N(4) = 2, N(8) = 272, N(10) = 7936$ ). The author proves the theorem: There exist curves of degree  $n$  and of an arbitrarily assigned type. He adds remarks on the roots of  $f(x) = C$  and on polynomial curves of degree  $n$  with  $k < n-1$  extremes. Bottema (Groningen).

**Emeh, Arnold:** Über symmetrische Monoide und Kegel. Comment. math. helv. 6, 133—143 (1933).

Symmetrische Gebilde in einem Raume  $S_r$  mit den Punktkoordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$  sind Punktmengeten, die von symmetrischen algebraischen Gleichungen dargestellt werden. Verf. betrachtet hier, im Raume  $S_3$ , die symmetrischen Monoide (d. h.  $F^n$  mit einem  $(n-1)$ -fachen Punkte) und Kegel der ersten Ordnungen, insbesondere 4-ter und 6-ter. Die Gleichungen solcher Monoide und Kegel werden mit den elementaren symmetrischen Funktionen der Punktkoordinaten ausgedrückt. Es werden insbesondere zwei Büschel symmetrischer Kegel 6. Ordnung betrachtet: die Kegel des einen Büschels haben 6 Rückkehrerzeugende und enthalten gewisse symmetrische Kurven 6. Ordnung; die des anderen haben 6 Doppelerzeugende. E. G. Togliatti (Genova).



**Emeh, Arnold:** On an involutorial Cremona transformation in  $S_r$ . Tôhoku Math. J. **37**, 100—109 (1933).

Im  $R_3$  werden drei Kegel zweiter Ordnung vorgegeben. Die inhomogenen binären Parameter  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ihrer Berührungsebenen werden als kartesische Koordinaten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  in einem Bildraume  $S_\lambda$  gedeutet. Einem Punkte  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  von  $S_\lambda$  entspricht auf jedem Kegel eine Berührungsebene. Diese drei Ebenen schneiden sich in einem Punkte  $x$ . Von  $x$  aus kann man nun an jeden der drei Kegel eine weitere Berührungsebene legen. Die zugehörigen Parameter führen zu einem Punkte  $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$  von  $S_\lambda$ . Es wird die so entstehende Cremona-Verwandtschaft zwischen  $S_\lambda$  und  $S'_\lambda$  untersucht. Verallgemeinerung:  $n$  Hyperkegel  $M_{n-1}^2$  vom Range 3 im  $R_n$ . Der Fall zweier Kegelschnitte in der Ebene war schon in § 3 (vgl. dies. Zbl. **5**, 115) behandelt worden.

Weiss (Bonn).

**Lo Voi, Antonino:** Sui sistemi associati di cicli lineari e di molteplicità a tre dimensioni su una superficie algebrica. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **71**, 64—69 (1933).

Soit la surface algébrique  $f(x, y, z) = 0$ . L'auteur étudie, d'après les méthodes de S. Lefschetz, les cycles linéaires de la courbe variable  $Hy$  découpée sur la surface  $f$  par le plan  $y = \text{const.}$  Il détermine pour les cycles de  $Hy$  un système fondamental (1)  $\beta_1, \dots, \beta_{2q}, \varrho'_1, \dots, \varrho'_{2p-2q}$  ( $q = \text{irrégularité de la surface } f$ ). Il considère d'autre part un système fondamental (2)  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}, \delta'_1, \dots, \delta'_\sigma, \dots, \delta'_{2p-2q}$  dans lequel  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}, \delta_2, \dots, \delta'_\sigma$  constituent un système fondamental pour les cycles linéaires de la variété réelle  $V_2$  de l'espace à quatre dimensions correspondants à  $f$ , ( $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}$  cycles de Picard,  $\delta'_1, \dots, \delta'_\sigma$  diviseurs de zéro; on peut supposer d'après Severi que ces  $2q + \sigma$  cycles sont situés sur  $Hy$ );  $\delta'_{\sigma+1}, \dots, \delta'_{2p-2q}$  sont éventuellement des cycles nuls sur  $V$ , non nuls sur  $Hy$ . L'auteur montre qu'on peut faire en sorte que les systèmes (1) et (2) soient associés, c'est à dire tels que la matrice des nombres de leurs intersections mutuelles soit la matrice unité. Il en déduit la détermination d'un système de cycles linéaires de torsion et d'un système de multiplicités à trois dimensions associés.

P. Dubreil (Paris).

**Godeaux, Lucien:** Sur une surface algébrique du huitième ordre. Tôhoku Math. J. **37**, 122—126 (1933).

Es wird eine algebraische Fläche 8. Grades mit  $p_a = p_g = 3$ ,  $p^{(1)} = 9$  angegeben, dessen Severischer Divisor  $\sigma = 2$  ist. Die Gleichung der Fläche lautet

$$\varphi_2^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 = \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3,$$

wo  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  quadratische Flächen in allgemeiner Lage sind. Die Fläche ist das Bild einer Involution von Punktpaaren auf einer Fläche  $F$  der Ordnung 16, Durchschnitt von 4 quadratischen Hyperflächen des Raumes  $S_6$ . van der Waerden (Leipzig).

**Hollerott, Temple Rice:** Degenerate algebraic manifolds. Tôhoku Math. J. **37**, 179—189 (1933).

L'auteur considère dans un espace  $S_r$  une variété algébrique  $V$  de dimension  $r_1$ , décomposée en  $\alpha$  parties irréductibles de même dimension, et se propose d'étudier les relations qui existent entre les nombres caractérisant la variété  $V$  (degré, classe, genre, nombre des singularités de tel ou tel type, etc. . .) et les nombres analogues concernant les variétés composantes. Il examine d'abord le cas d'une courbe plane, gauche ou appartenant à un hyperspace (avec différentes remarques sur les courbes dégénérées en droites), puis le cas d'une surface. Le travail se termine par quelques remarques relatives à la forme probable des résultats pour le genre d'une hypersurface. Dubreil.

**Kanitani, Jôyô:** Sur les complexes réguliers de droites. Tôhoku Math. J. **37**, 320 bis 339 (1933).

Die absolute Quadrik  $Q_4$ , welche zur Abbildung des Geradenraumes dient, sei mittels der Gleichung  $(x, x) \equiv \sum_1^6 (x^i)^2 = 0$  in den Klein-Plückerschen Koordinaten gegeben. Der Verf. studiert die dreidimensionalen Flächen  $X_3$ , welche die Geraden-

komplexe  $x = x(u^1, u^2, u^3)$  darstellen. Zuerst wird das begleitende Simplex  $x \equiv x_0, \dots, x_5$  konstruiert: Es besteht aus dem betrachteten Bildpunkte  $x$ , aus drei Punkten  $x_1, x_2, x_3$  in dem Tangentialraume  $E_3$  von  $X_3$ , aus dem Punkte  $x_4$ , der auf der — zu  $E_3$  konjugierten — Gerade beliebig gewählt wird, und schließlich aus dem Durchschnittspunkte  $x_5$  der Quadrik  $Q_4$  mit der — zu  $E_3 = x_1 x_2 x_3 x_4$  konjugierten — Gerade. Für dieses Simplex werden die Cartanschen „Bewegungsgleichungen“ aufgestellt

$$dx_\lambda = \Omega_\lambda^\nu x_\nu, \quad (\lambda, \nu = 0, \dots, 5) \quad (1)$$

Nun stellt sich heraus, daß die Koeffizienten  $\Omega$  in drei quadratischen Formen

$$H = -(dx, dx), \quad N = -(x_4, d^2x), \quad M = (x_5, d^2x)$$

(und einer linearen) ausdrückbar sind. Die Koeffizienten  $H_{ij}$ ,  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  (und  $M_i$ ) ( $i, j = 1, 2, 3$ ) der erwähnten Formen werden durch die Hauptgleichungen gebunden. Diese bilden ein Analogon zu den Hauptgleichungen der Flächentheorie und werden auch mittels der Konstruktion der „bilinearen Kovariante“ abgeleitet. Die Abbildung einer geradlinigen Torse ist eine Kurve, deren Tangentialrichtungen der Gleichung  $H = 0$  genügen. Der quadratische Kegel  $H = 0$ , dessen Geraden aus dem Bildpunkt  $x$  ausgehen, bildet eine lineare (parabolische) Kongruenz ab. Eine Kurve heißt „Direktrix“, wenn die jetzt erwähnten Kongruenzen in  $x$  und dem konsekutiven Punkte auf der Kurve demselben linearen Komplex angehören. Der Begriff der „Direktrix“ sowie auch die verwandten Fragen hängen aufs engste mit der Gleichung

$$\text{Determinante } |N_{ij} - \varrho H_{ij}| = 0 \quad (2)$$

zusammen. Eine genaue Untersuchung dieser Gleichung zeigt, daß es im ganzen 6 Möglichkeiten der Komplexe gibt. Die Diskussion der Gleichung (2) zusammen mit den oben erwähnten Fundamentalgleichungen ermöglicht dem Verf. 15 Sätze über die Komplexe zu beweisen. Als Beispiel diene Satz XII: Von jedem Bildpunkte eines Komplex fünfter Art gehen zwei Direktrix aus, von denen nur eine die Tangente auf den Kegeln  $H = 0$  hat. — Die Arbeit hängt mit der Monographie desselben Verf. „Géométrie différentielle projective des hypersurfaces“ (Ryojun, Coll. Engrg. 1931) zusammen. (Vgl. dies. Zbl. 5, 261.) Hlavatý (Praha).

### Differentialgeometrie:

**Hilton, Harold:** On the differential equation of a plane curve. Tôhoku Math. J. 37, 169—174 (1933).

Drei unabhängige Lösungen der „Differentialgleichung einer ebenen Kurve“

$$\ddot{u} + 3a\dot{u} + 3b\dot{u} + cu = 0, \quad (1)$$

( $a, b, c$  bedeuten Funktionen von  $t$ , Punkte Ableitungen nach  $t$ ) geben die homogenen Koordinaten  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  einer ebenen Kurve. Die Gleichung (1) wird schließlich in

$$\ddot{u} - 2a\dot{u} + (1 - \dot{a})u = 0 \quad (2)$$

umgeformt, was wegen der Willkür in (1) möglich ist und nach einiger Umformung durch eine Quadratur gelingt. Es werden mehrere Sonderfälle untersucht, so  $a = \text{konst.}$ ,  $a = kt$ . Für  $x, y, z$  werden in geeigneten homogenen Koordinaten die Reihenentwicklungen nach Potenzen eines Parameters  $s$  angeschrieben und mit ihrer Hilfe Kurven bestimmt, die unsere Kurve an der Stelle  $s = 0$  projektiv invariant mehrpunktig berühren. Heinrich Schatz (Innsbruck).

**Lane, Ernest P.:** On the projective differential geometry of plane curves. Tôhoku Math. J. 37, 423—435 (1933).

Mit einer ebenen Kurve  $C$  ist bekanntlich ein lokales Koordinatensystem projektiv invariant verbunden, indem die Kurve  $C$  durch

$$y = x^2 + ax^5 + bx^7 + (b + 2a^2)x^8 + \dots$$

dargestellt wird. Es wird der Übergang zu dem invarianten lokalen Koordinatensystem im unendlich benachbarten Kurvenpunkte berechnet. Das Ergebnis wird dazu benutzt, die Tangente an den Ort eines mit  $C$  projektivkovariant verbundenen Punktes sowie



den Berührungspunkt der Enveloppe einer mit  $C$  projektivkovariant verbundenen Kurve zu bestimmen. Dies wird an einer Reihe von Beispielen durchgeführt. *Čech*.

**Tortorici, Pietro:** *Intorno ad un problema sulle carte geografiche*. Rend. Circ. mat. Palermo **57**, 210—234 (1933).

Kartierung heiße eine flächentreue Abbildung einer Rotationsfläche  $R$  auf eine Ebene  $E$ , wobei die Meridiane und Breitenkreise von  $R$  in ein Orthogonalsystem  $S$  von  $E$  übergehen. Die Kartierung heiße isotherm, wenn  $S$  isotherm ist (dann herrscht längs eines Breitenkreises stets dasselbe Verzerrungsverhältnis zwischen Meridian- und Breitenkreisrichtung). Korkine hatte das allgemeine Kartierungsproblem auf die Integration der Telegraphengleichung zurückgeführt. Auf ganz anderem Weg hatte Reina die isothermen Kartierungen auf Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt. Nach kurzer Wiedergabe der Methoden von Reina und Korkine gibt Verf. eine einheitliche Behandlung beider Probleme. Und zwar ist die allgemeine Kartierung gleichbedeutend mit der allgemeinen Integration der Gleichung

$$\frac{z_{uu}}{z_u^2} + \frac{z_{vv}}{z_v^2} = 0. \quad (1)$$

Die Kartierung ist genau dann isotherm, wenn  $z(u, v)$  auch noch der Gleichung

$$z_{uv} = z_u z_v f(z) \quad (2)$$

genügt. Damit (1) und (2) kompatibel sind, muß  $f(z)$  der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$f'' + 4ff' + 2f^3 = 0 \quad (3)$$

genügen, worauf sich (1), (2) durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ersetzen lassen. Es werden mehrere Beispiele gerechnet. In den Formeln zahlreiche Druckfehler.

*Cohn-Vossen* (Locarno).

**Sauer, R.:** Zusatz zu der Arbeit: „Wacklige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung“, Math. Annalen **108**, S. 673—693. Math. Ann. **109**, 160 (1933). Vgl. dies. Zbl. **7**, 227.

**Takasu, Tsurusaburo:** Differentialkugelgeometrie. IX. Die Extremalen  $\delta \int u ds \equiv \delta \int a \hat{s} = 0$  in der konformen Ebene. Jap. J. Math. **10**, 19—21 (1933).

Es wird ein Variationsproblem der ebenen Konformgeometrie behandelt, das bei der üblichen Abbildung auf den hyperbolischen Raum mittels stereographischer Projektion auf folgendes hinauskommt: Es sind die Extremalen von  $\delta \int d\tau = 0$  zu bestimmen, wobei  $d\tau$  der Kontingenzwinkel der Kurve ist. Bekanntlich ergeben sich als Lösungen die ebenen Kurven des hyperbolischen Raumes. *Thomsen* (Rostock).

**Takasu, Tsurusaburo:** Differentialkugelgeometrie. X. Zur Isoperimetrie in der konformen Ebene. Jap. J. Math. **10**, 23—32 (1933).

Mittels seiner Theorie der „instantan absoluten Elemente“ verallgemeinert der Verf. die von F. Bernstein für das isoperimetrische Problem der sphärischen Geometrie abgeleitete Ungleichung.

*Thomsen* (Rostock).

**Takasu, Tsurusaburo:** Differentialkugelgeometrie. XI. Vierscheitelsatz in der konformen und Lagerreschen Geometrie. Jap. J. Math. **10**, 33—51 (1933).

Es wird ein rein konformgeometrischer Beweis für den Vierscheitelsatz der ebenen Kurventheorie und ebenso für gewisse Verallgemeinerungen desselben gegeben. Diesen Beweisen werden rein laguerregeometrische Beweise an die Seite gestellt. — Für ein Analogon des Vierscheitelsatzes in der Theorie der Raumkurven wird ein Beweis mit den Hilfsmitteln der räumlichen Lagerregeometrie geliefert. *Thomsen* (Rostock).

**Matsumura, Sôji:** Beiträge zur Inversionsgeometrie und Lagerre-Geometrie. Tôhoku Math. J. **37**, 468—470 (1933).

En rapprochant sa Note (ce Zbl. **6**, 219) avec la Note de M. Kubota [Jap. J. Math. **1**, 41 (1924)], l'auteur modifie un peu le théorème fondamental sur l'équivalence de deux courbes planes dans les deux géométries signalées au titre. *S. Finikoff* (Moscou).

● Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis samt Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Physik. Hrsg. v. B. Kagan. Liefg. 1. — Kagan, B.: Über eine Erweiterung des Begriffes vom projektiven Raume und dem zugehörigen Absolut. — Schapiro, H.: Über die Metrik der subprojektiven Räume. — Raschewsky, P.: Caractères tensoriels de l'espace sousprojectif. — Gurewitsch, G.: Über einige Integralaufgaben der Tensoranalysis. — Dubnow, J.: Über Tensoren mit nichtskalaren Komponenten. — Dubnow, J.: Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung. Moskau u. Leningrad: Staatl. Techn.-Theoret. Verl. 1933. 303 S.

This collection of papers, published by the University of Moscow, deals essentially with three subjects, with the so-called subprojective spaces, with the integrability conditions of covariant differential equations and with tensors of which the components belong to a linear associative algebra. The text is written either in German or in French, with short abstracts in Russian. The papers take their origin from the seminar of Professor B. Kagan. They have been composed with care, go often into the details of the computation and are very readable. — I. Subprojective spaces. This is the subject of the first three papers, the conception is due to B. Kagan. This author first defines a  $k$  times projective space  $P_n^k$  by the condition that it is an  $n$ -dimensional manifold of symmetrical linear connection, which admits a set of  $n$  „projective coordinates“ such that the paths (‘‘geodesic lines’’) lie in linear manifolds of  $k$  dimensions. A  $P_n^{n-1}$  is a projective space of  $n$  dimensions. The subprojective spaces are those  $P_n^{n-2}$  of which all  $\infty^{2(n-2)}$  ‘‘geodesic planes’’ pass through a fixed point, they form a class of preferred character. Kagan's paper deals first with the  $P_n^{n-1}$  and then extends the results to the subprojective  $P_n^{n-2}$ . — The connection of the  $P_n^{n-1}$  is of the form

$$\Gamma_{kl}^i = E_{kl}^i + \delta_l^i p_k + \delta_k^i p_l,$$

where the  $E_{kl}^i$  are the Christoffel symbols of a Euclidean connection, the  $p_i$  and  $\delta_l^i$  are an arbitrary vector and the unit tensor. In projective coordinates the  $E_{kl}^i$  vanish. The cases in which this manifold is Riemannian (or ‘‘metrical projective’’) depends on certain differential equations, of which the integrability conditions determine whether we find the euclidean or the non-euclidean geometries. — A similar reasoning is now applied to the subprojective spaces. In projective coordinates  $x^i$  we get as necessary and sufficient condition

$$\Gamma_{kl}^i = f_{kl} x^i + \delta_l^i p_k + \delta_k^i p_l,$$

the  $f_{kl}$  form a symmetrical tensor. Now the question arises when the spaces are metrical. The answer depends on the nature of the integrability conditions of the equations

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = f_{ki} g_j + f_{jl} g_k + 2g_{lk} p_j + g_{il} p_k + g_{kl} p_i, \quad \text{where } g_i = g_{ii} x^i.$$

It is found that in this case both  $p_i$  and  $f_{kl} x^i$  are gradient vectors, they define two scalars  $\vartheta$  and  $\varphi$ . The equations  $\vartheta = 0$ ,  $\varphi = 0$  give the two ‘‘absolute surfaces’’. For a  $P_n^{n-1}$  and projective coordinates  $\varphi$  is constant and the other absolute surface goes to infinity. — When the integrability conditions are identically satisfied we call the subprojective spaces ‘‘euclidean’’. There are three types, which are studied in detail. In the case that the integrability conditions are only satisfied by certain values of  $g_{ik}$ , we get the ‘‘non-euclidean’’ forms. To this case also belongs a conform-euclidean type, studied by A. Buchholz. — According to a theorem of Raschewski, it is always possible to find in a subprojective space a special set of coordinates, the ‘‘canonical coordinates’’, for which  $p_i = 0$ . Schapiro's paper takes up the study of subprojective spaces in these coordinates. This allows him to simplify many of Kagan's results. He finds the condition that such spaces are projective ‘‘in the narrow sense’’, that is Riemannian of constant curvature. Other results deal with Riemannian manifolds of the Einstein type and of the type ‘‘with a center’’, investigated by Weyl, and the theorem is established that a subprojective space of  $n$  dimensions can always be imbedded in a euclidean space of  $n+1$  dimensions. — Raschewsky's paper discusses the conditions that a metric given in arbitrary coordinates be subprojective. The conclusion is that the manifold must be conformal euclidean,

$$R_{klij} = g_{ik} T_{lj} + g_{lj} T_{ik} - g_{il} T_{jk} - g_{jk} T_{li} \\ \nabla_{[m} T_{ij]} = 0,$$

with the additional condition that two non-constant scalar fields  $P$ ,  $g$  exist for which

$$T_{ij} = P g_{ij} + P_i g_j, \quad P_i = \partial P / \partial x^i, \quad g = g(P).$$

The differential equations for canonical systems of coordinates in terms of arbitrary coordinates are also found. — II. Integrability conditions of covariant differential equations. This paper, by Gurewitsch, deals with the equation

$$\nabla_{[i} w_{t_1 t_2 \dots t_p]} = w_{t_1 t_2 \dots t_p} v_{[i}, \quad w_{t_1 \dots t_p} = w_{[t_1 \dots t_p]}.$$



Methods are given to get the general solution for  $p = 1$ ,  $p = 2$ , and for an arbitrary  $p$  the necessary and sufficient conditions are given for the existence of not identically vanishing solutions, at the same time solutions are given "that probably are the general solutions". The paper also gives the method of integration of

$$V_k w_i = w_i v_{k1} + u_{ik}, \quad w_i \text{ unknown, } v_i \text{ and } u_{ik} = -u_{ki} \text{ given.}$$

It would be of interest to compare these results with those of J. A. Schouten, "On the conditions of integrability of covariant differential equations", Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 441—473 (1925), who also treats more general cases. III. Tensors belonging to a linear associative algebra. To this subject are devoted two papers by Dubnow, the first paper explaining the theory and giving applications to the differential geometry of surfaces in euclidean three space; the second paper dealing with the differential geometry of line congruences, also in euclidean three space. We shall confine ourselves to the explanation of the principle. — Let  $\mathbf{r}$  be the radius vector of a point  $M(u^1, u^2)$  of a surface  $V_2$ . Let  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$  represent the derivatives of  $\mathbf{r}$  with respect to  $u^1$  and  $u^2$ . These vectors are now considered as components of a field of covariant "tensors"  $\mathbf{r}_i$ , given at the points  $M$  of the  $V_2$ . This means that under the transition to new coordinates  $u^1, u^2$  on  $V_2$  the vectors  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  are replaced by the new pair according to the formulas

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^i}, \quad i, \alpha = 1, 2.$$

If  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$  are the reciprocal vectors to  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  in the tangential plane of  $V_2$  at  $M$

$$\mathbf{r}^i \mathbf{r}_j = \delta^i_j,$$

then we can take  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$  as components of a contravariant "tensor"  $\mathbf{r}^i$ . A covariant differentiation can also be defined. Many formulas of ordinary surface theory become very simple in this new tensor notation. In the differential geometry of line congruences, to which the author devotes an extensive study of 77 pages, he can considerably improve, not only on Kummer, but also on Sannia. The theory now becomes that of two tensors in Dubnow's sense, a tensor  $b_{ij}$  and a tensor  $\beta_i$  related by a differential relation

$$V_{(j} \beta_{i)} = b_{ij}.$$

Many properties of line congruences are now discussed, also of special congruences (parabolic, Guichard, Bianchi, isotropic). Struik (Cambridge).

**Michal, A. D., and J. L. Botsford: Geometries involving affine connections and general linear connections. An extension of the recent Einstein-Mayer geometry.** Ann. Mat. pura appl., IV. s. **12**, 13—32 (1933).

This paper deals with a general linear connection in the sense of R. König, in which a space of  $m$  dimensions is attached to each point of a general manifold of  $n$  dimensions. In such a general manifold of  $n$  dimensions are assumed a symmetrical linear connection  $\Gamma^i_{jk}$  and a general linear connection  $L^\alpha_{\beta a}$ , both functions of the coordinates  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , and where the Greek indices run from 1 to  $m$ , the Latin from 1 to  $n$ . The definition of  $L$  is in accordance with suggestions by Whitehead, Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 191—209 (1931); see this Zbl. **1**, 167. Then composite tensors are studied, defined as tensors which may have both Greek and Latin indices. With the aid of normal representations, normal tensors are constructed which lead to a general reduction theorem. A particular case is that of Einstein and Mayer in which  $n = 5$ ,  $m = 4$  and the  $\Gamma^i_{jk}$  are the Riemannian Christoffel symbols. The  $L^\alpha_{\beta a}$  can then be computed. Beside the general reduction theorem there exists also a reduction theorem for tensor differential invariants with only Latin indices. Struik (Cambridge).

**Hombu, Hitoshi: On a non-Finsler metric space.** Tôhoku Math. J. **37**, 190—198 (1933).

Es sei  $I(x, x', \dots, x^{(r)})$  ( $r \geq 2$ ) eine Invariante in bezug auf die Parametertransformation,  $H(x, x')$  die Funktion, welche in bekannter Weise zur Finslerschen Metrik führt. Der Verf. führt eine andere Metrik mittels der Funktion  $\bar{F} = I H$  ein. Eine direkte Verallgemeinerung der Craigschen Überlegungen [Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 125—142 (1931); vgl. dies. Zbl. **1**, 167] führt ihn dann zu einer Familie der metrischen Übertragungen, unter welchen eine ausgezeichnet ist, nämlich die, deren Autoparallelen mit den Extremalkurven der Finslerschen Metrik übereinstimmen. Die betreffenden Konnexionskoeffizienten stellen eine direkte Verallgemeinerung der Craigschen (vgl. das zit. Ref.) dar. Es ist interessant, daß die besprochene Konnexion sich in die Kavaguchische [Proc. Imp. Acad. Tokyo **7**, 211—214 (1931); Rend. Circ. mat.

Palermo 56, 245—276 (1932) und Proc. Imp. Acad. Jap. 8, 340—343 (1932); vgl. dies. Zbl. 2, 158; 5, 414; 6, 32] einreihen läßt. *Hlavatý (Praha).*

### Topologie:

**König, Dénes:** Über trennende Knotenpunkte in Graphen (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen). Acta Litt. Sci. Szeged 6, 155—179 (1933).

Graphentheoretischer Beweis des Mengerschen Satzes, daß die Minimalzahl der Eckpunkte eines Graphen, die zwei gegebene fremde Eckpunktengen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  dieses Graphen trennen, gleich der Maximalzahl der paarweise fremden,  $\Pi_1$  mit  $\Pi_2$  verbindenden Wege dieses Graphen ist. *Reinhold Baer (Manchester).*

**Rutt, N. E.:** Prime ends and order. Ann. of Math., II. s. 34, 415—440 (1933).

A detailed study of a plane point set  $Z$  which is the sum of a bounded continuum  $X$  and a collection of continua  $[X_\alpha]$  which are disjoint except possibly for common points in  $X$  and are such that for each  $\alpha$ ,  $X \cdot X_\alpha \neq 0$ ,  $X_\alpha - X \cdot X_\alpha$  is connected and no bounded complementary domain of  $X + X_\alpha$  intersects any  $X_\beta$ . A cyclic order is assigned to the collection  $[X_\alpha]$  with the aid of a suitably chosen element  $X_\gamma$ . The article is divided into five parts. The first and second of these are concerned with the prime ends (in the sense of Carathéodory) of the domains complementary to continua formed by  $X$  together with one and with two respectively of the elements of  $[X_\alpha]$ . In part III the notion of a point being intercepted by an element  $X_\alpha$  and a series of elements  $[X_i]$  of  $[X_\alpha]$ , is introduced and studied in the light of various separations among the sets  $[X_\alpha]$ . The fourth part contains the author's principal results and includes the proposition that any two series in  $[X_\alpha]$  which intercept the same non-vacuous set with respect to a given  $X_\alpha$  are concurrent, and conversely any two concurrent series intercept the same set with respect to  $X_\alpha$ , provided each intercepts some non-vacuous set with respect to  $X_\alpha$ . In the final part the author applies his results to the problem of the assignment of an order to the point sets contained in the prime ends of a domain with the aid of the cyclic order of the prime ends themselves. *G. I. Whyburn.*

**Denjoy, Arnaud:** Sur les continus cycliques plans. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 570—572 (1933).

I. (Définition géométrique.) „Ein ebenes Kontinuum  $H$  heißt ‚zyklisch‘, falls es Grenze eines ebenen Gebietes  $R$  ist und gleichmäßig stetig ist, d. h. für jedes  $\varepsilon > 0$  höchstens endlich viele Kontinua ohne gemeinsame Punkte mit dem Durchmesser  $> \varepsilon$  enthält.“ — [Die hier eingeführte Definition der gleichmäßigen Stetigkeit ist ein Spezialfall des Zusammenhanges im kleinen, in der topologischen Literatur für beliebige (auch nicht ebene) Kurven seit 1922—1924 gut bekannt und in dem Mengerschen Buche (Menger, Kurventheorie, S. 239—249. Teubner 1932) als erblicher Zusammenhang im kleinen, zwar in einer etwas abweichenden Form betrachtet.] — II. (Cas réduit.) Der vom Verf. betrachtete Spezialfall der Kurve  $H$ , die kein Gebiet außer  $R$  begrenzt (die in keinem Sinne „zyklisch“, sondern üblicherweise azyklisch genannt wird), fällt mit den sog. (ebenen) Baumkurven zusammen. Die in der Note erwähnten Eigenschaften der Bäume sind auch schon lange bekannt. (Menger, l. c., S. 304 bis 312). — III. (Cas général.) Im allgemeinen Falle, wenn außer  $R$  noch andere Komplementärgebiete vorhanden sind, sollen die topologischen Kreise Grenzen verschiedener Komplementärgebiete von  $H$ , paarweise entweder ohne gemeinsame Punkte sein oder einen einzigen gemeinsamen Punkt enthalten. Es werden Struktureigenschaften solcher Kontinua (erblich in kleinen zusammenhängender Kurven ohne  $\theta$ -Kurven als Untermengen) untersucht. — IV. Drei Bedingungen über den Charakter einer stetigen Abbildung  $f(\Omega) = H$  ( $\Omega$  topologischer Kreis). *Julia Rózańska (Moskau).*

**Mazurkiewicz, Stefan:** Sur les ensembles d'unicité. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 1/3, 18—20 (1933).

Sei  $I$  das Intervall  $0 \leq x \leq 1$ ; ist  $A \subset I$  abgeschlossen und  $k$  eine natürliche Zahl, so sei  $U_k(A)$  die Menge aller Punkte  $r = 1, \varphi = 2k\pi x$ , wo  $x \in A$ , und  $2\pi d_k(A)$



die Länge des größten zu  $U_k(A)$  fremden Kreisbogens; sei  $\mathfrak{S}$  das System aller abgeschlossenen Mengen  $\subset I$  mit  $\lim d_k(A) > 0$ ; schließlich sei  $2^I$  der Hyperraum von  $I$  (d. h. das durch die Hausdorffsche Distanz metrisierte System aller abgeschlossenen Teilmengen von  $I$ ). Verf. zeigt:  $\mathfrak{S}$  ist ein  $G_{\delta\sigma}$  von 2. Kategorie in  $2^I$ , während  $2^I - \mathfrak{S}$  von 1. Kategorie in  $2^I$  ist. Nöbeling (Erlangen).

## Relativitätstheorie.

**Whitrow, G. J.:** A derivation of the Lorentz formulae. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 161—172 (1933).

Es wird angenommen: 1. Die Existenz einer bestimmten Geschwindigkeit  $c$ , die für alle Beobachter in relativ-gleichförmiger Translation gleich ist. 2. Die Realisierbarkeit dieser Geschwindigkeit in Signalvorrichtungen. 3. Die Gleichwertigkeit aller relativ-gleichförmig, geradlinig bewegten Beobachter. (Enthält die Forderung der Gruppeneigenschaft der Transformation zwischen irgend zwei Beobachtern.) 4. Die Isotropie der Welt hinsichtlich der Orientierung der Verbindungslinie zwischen zwei Beobachtern. 5. Die zweimalige Differenzierbarkeit der gesuchten Transformationsgleichungen, deren Linearität nicht vorausgesetzt wird. 6. Die Euklidizität des Raumes. — Aus den resultierenden Funktionalgleichungen folgt die Lorentztransformation. Heckmann (Göttingen).

**Banerji, A. C.:** A note on the special theory of relativity. Current Sci. 1, 234—236 (1933).

**Leroux, J.:** Sur une hypothèse de Poincaré. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 816—818 (1933).

**Campbell, J. W.:** The clock problem in relativity. II. Philos. Mag., VII. s. 16, 529 bis 544 (1933).

**Ghosh, J.:** Das Gravitationsfeld des Elektrons. Z. Physik 85, 511—513 (1933).  
Verf. betrachtet die Feldgleichungen in der Form

$$K_{pq} - \frac{1}{4} g_{pq} K = -8\pi E_{pq},$$

wo  $K_{pq}$  den metrischen Krümmungstensor und  $E_{pq}$  den elektromagnetischen Energietensor bezeichnet, und löst sie für den Fall eines geladenen Massenpunktes (sphärische Symmetrie). Für  $ds^2$  ergibt sich der Ausdruck

$$\text{mit} \quad ds^2 = -\frac{dr^2}{A} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + A dt^2$$

$$A = 1 - \frac{1}{3} \alpha r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi e^2}{r^2}.$$

Das Glied mit  $\alpha r^2$  in  $A$  wird vom Verf. in dem Sinne gedeutet, daß auch die leere Raumzeit nicht galileisch ist. V. Fock (Leningrad).

**Dingle, Herbert:** On E. A. Milne's theory of world structure and the expansion of the universe. Z. Astrophys. 7, 167—179 (1933).

Kritik des allgemeinen Standpunktes der Arbeit von Milne, Z. Astrophys. 6, 1—95 (1933); dies. Zbl. 6, 233. Heckmann (Göttingen).

**Robertson, H. P.:** On E. A. Milne's theory of world structure. Z. Astrophys. 7, 153—166 (1933).

Es wird gezeigt, daß die von Milne (vgl. dies. Zbl. 6, 233) gegebene Theorie der Rezession der Spiralnebel nur in scheinbarem Gegensatz steht zu der bekannten Theorie der Expansion des Universums. Namentlich die Äquivalenz von Milnes „Extended Principle of Relativity“ mit der Einsteinschen Forderung der Homogenität der Welt wird hervorgehoben. [Vgl. die Bemerkungen des Ref. dies. Zbl. 6, 234 im Referat über die Arbeit von Milne, sowie Kermack und McCrea, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93, 519 (1933); dies. Zbl. 7, 186.] Heckmann (Göttingen).

Milne, E. A.: Note on H. P. Robertson's paper on world-structure. *Z. Astrophys.* **7**, 180—187 (1933).

Erwiderung auf die beiden im vorhergehenden genannten Arbeiten von Robertson und Dingle. *Heckmann* (Göttingen).

Sitter, W. de: On the expanding universe and the time-scale. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **93**, 628—634 (1933).

Die Arbeit bemüht sich, jene Lösungen der Friedmannschen Gleichung annehmbar zu machen, bei welchen z. B. im Falle eines sphärischen Raumes der Krümmungsradius  $R$  des Raumes von  $R = 0$  zur Zeit  $t = t_0$  an monoton unendlich wird. Es wird plausibel zu machen versucht, daß für  $t = t_0$  die Materie nicht punktförmig zusammengeballt gewesen sei wegen der Wechselwirkungen zwischen benachbarten Spiralnebeln, daß vielmehr nur eine starke Annäherung der Systeme stattgefunden habe, die dem Verf. eine willkommene Möglichkeit zur Aufhellung verschiedener kosmogonischer Probleme gibt. *Heckmann* (Göttingen).

Sitter, W. de: On the motion and the mutual perturbations of material particles in an expanding universe. *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **7**, 97—105 (1933).

Approximative Behandlung des Problems der Wechselwirkungen zwischen benachbarten Sternsystemen in einer sich ausdehnenden Welt mit dem Ziel, die in der Arbeit des Verf. [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **93**, 628—634 (1933)] vorgebrachten kosmogonischen Ideen zu stützen (vgl. vorst. Referat). *Heckmann* (Göttingen).

Lemaître, G.: L'univers en expansion. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **53**, 51—85 (1933).

Die Arbeit studiert als Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen solche  $R_4$ , die überall orthogonale Koordinaten zulassen. Unter der Voraussetzung der Kugelsymmetrie des Linienelementes und der Strömungsfreiheit der Materie ( $T_{14} = 0$ ), die nach Angabe des Verf. keine Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungen einschließt (wofür ein Beweis nicht erbracht wird), werden dann der Reihe nach behandelt: quasistatische Felder, Eddingtons Problem einer Materiekugel mit konstanter Eigendichte, die Instabilität der Einsteinschen Welt, Kondensationen in einer sich ausdehnenden Welt, Integration der Friedmannschen Gleichung durch elliptische Funktionen, Nebelhaufen, das Schwarzschildsche „äußere“ Feld, das „Verschwinden“ des Raumes. Die interessanten Einzelheiten der Arbeit sind so zahlreich, daß auf diese selbst verwiesen werden muß. *Heckmann* (Göttingen).

## Quantentheorie.

Breit, G., and Lawrence A. Wills: Hyperfine structure in intermediate coupling. *Physic. Rev.*, II. s. **44**, 470—490 (1933).

Die Hyperfeinstruktur der Spektren von Atomen mit mehreren Elektronen in unabgeschlossenen Schalen wird theoretisch untersucht. Der Kern wird, wie üblich, als Punktladung mit magnetischem Moment angesetzt, die Rechnung jedoch nicht auf Russell-Saunderssche Koppelung zwischen den Elektronen beschränkt, sondern gleich für den bei schwereren Elementen häufig vorkommenden Fall mittlerer Koppelung relativistisch durchgeführt. Die theoretischen Ergebnisse werden mit den experimentellen Daten für Hg, Pb und Bi verglichen. Es ergibt sich, daß im großen und ganzen Übereinstimmung herrscht, und zwar am besten bei reiner  $jj$ -Koppelung der Elektronen. In den Fällen, wo quantitative Abweichungen in der Hyperfeinstruktur auftreten, sind solche auch bei der Deutung der gewöhnlichen Multipletts und ihrer Zeemaneffekte gefunden. Die Verff. kommen auf Grund dieser Tatsache zu dem Schluß, daß der näherungsweise Charakter der Koppelungstheorie, d. h. die Nichtberücksichtigung der gegenseitigen Störung verschiedener Elektronenkonfigurationen, und nicht die Unzulänglichkeit des Kraftansatzes zwischen Kern und Elektronen für die Abweichungen verantwortlich gemacht werden muß. Hierin deckt sich ihre Überzeugung mit der von Fermi und Segré vertretenen Auffassung (vgl. dies. Zbl. **7**, 87). *R. de L. Kronig*.



**Inglis, D. R.:** Die magnetische Umwandlung der Hyperfeinstruktur in Quecksilber. *Z. Physik* 84, 466—473 (1933).

Es wird die Veränderung der Hyperfeinstruktur der Hg-Linie  $\lambda$  2537 bei zunehmender magnetischer Feldstärke (Paschen-Back-Effekt) berechnet. Es wird zuerst die Säkulargleichung für die Extremfälle (kleine und große magnetische Feldstärken) hingeschrieben und dann die allgemeine Säkulargleichung aus den Forderungen abgeleitet, daß sie für die Extremfälle mit den bereits angegebenen Gleichungen übereinstimmen soll und daß sie in den drei Größen: 1. magnetische Feldstärke ( $H$ ), 2. Wechselwirkungsenergie zwischen Kernspin und Elektronenhülle ( $a$ ) und 3. Energieniveau für die betreffende Feldstärke, d. h. Wurzel der Säkulargleichung ( $\epsilon$ ), homogen sein soll. Auch die Intensitäten der einzelnen Linien können leichter berechnet werden, wenn man die Extremfälle zu Hilfe nimmt. Zum Vergleich mit dem Experiment wurden noch die Formeln für Absorption in einer dickeren Schicht und Dopplerverbreiterung auf das spezielle Problem angewandt. *E. Teller* (Göttingen).

**Hulthén, L.:** Über die quantenmechanische Herleitung der Balmerterme. *Z. Physik* 86, 21—23 (1933).

Die Arbeit bringt eine Vereinfachung der von Pauli herrührenden matrixmechanischen Ableitung der Balmerformel. *O. Klein* (Stockholm).

**Briegleb, Günther:** Über den polaren Aufbau der Moleküle und die Natur der Nebenvan-Kräfte. *Z. physik. Chem. B* 23, 105—130 (1933).

Auf Grund der physikalischen Vorstellungen über zwischenmolekulare Kräfte (Richteffekt, Induktionseffekt, wellenmechanische Störung) wird eine Übersicht über die bei Molekelverbindungen möglichen Bindungsarten gegeben. An Hand vieler Beispiele wird das Hervortreten bestimmter dieser Effekte studiert. *F. Hund*.

**Gibson, G. E., O. K. Rice and N. S. Bayliss:** Variation with temperature of the continuous absorption spectrum of diatomic molecules. II. Theoretical. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 193—200 (1933).

Es wird aus dem Absorptionsverlauf im kontinuierlichen Spektrum des  $\text{Cl}_2$  unter plausiblen Annahmen über die Potentialkurve im unteren Elektronenzustand auf die Potentialkurve im oberen Zustand geschlossen. Es werden zu diesem Zwecke die Matrixelemente des elektrischen Momentes für ein kontinuierliches Molekülspektrum allgemein hingeschrieben und für den speziellen Fall des  $\text{Cl}_2$  genauer berechnet.

*E. Teller* (Göttingen).

**Pauling, Linus, and J. Sherman:** The nature of the chemical bond. VI. The calculation from thermochemical data of the energy of resonance of molecules among several electronic structures. *J. chem. Phys.* 1, 606—617 (1933).

Die Bindungsenergie von Molekeln, deren Grundzustand durch eine Anzahl gewöhnlicher Valenzbindungen beschrieben werden kann, setzt sich additiv aus den Energien der einzelnen Bindungen zusammen. Bei den Molekeln, deren Grundzustand durch eine Kombination mehrerer Elektronenzustände (die einzeln Valenzzustände darstellen) beschrieben wird, ist die Bindung fester, als jedem dieser Elektronenzustände entspricht — eine Folge der Resonanzenergie zwischen ihnen. An Hand des empirischen Materials wird dies für viele Verbindungen diskutiert. *F. Hund* (Leipzig).

**Pauling, Linus, and J. Sherman:** The nature of the chemical bond. VII. The calculation of resonance energy in conjugated systems. *J. chem. Phys.* 1, 679—686 (1933).

Analog der früheren Behandlung des Benzols und Naphthalins (vgl. dies. Zbl. 7, 139) wird die konjugierte Doppelbindung betrachtet. *F. Hund* (Leipzig).

**Kaischew, R., und L. Krastanow:** Über das Verhältnis  $\frac{\lambda m}{\sigma m}$  bei Kristallen und Flüssigkeiten. *Z. physik. Chem. B* 23, 158—162 (1933).

Einfache Modellbetrachtungen über das Verhältnis von molekularer Verdampfungswärme zu molekularer Oberflächenenergie. *F. Hund* (Leipzig).

**Weisskopf, V.:** Die Streuung des Lichts an angeregten Atomen. *Z. Physik* 85, 451 bis 481 (1933).

Die Arbeit, welche eine Fortsetzung von früheren Arbeiten [*Ann. Physik* 2, 23 (1931) (dies. Zbl. 1, 376); *Phys. Z. Sowjetunion* 4, 97 (dies. Zbl. 7, 235)] desselben Verf. bringt, enthält eine eingehende Darstellung der Lichtstreuung unter Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung, wobei sich neue, in der Kramers-Heisenbergschen Theorie nicht enthaltene Züge ergeben. Insbesondere wird gezeigt, daß ein mit monochromatischem Licht bestrahltes Atom in einem unscharfen Anfangszustand zu einem eigentümlichen Resonanzeffekt Anlaß geben muß, bei dem Eigenfrequenzen des Atoms mit einer der Randlinien entsprechenden Stärke ausgestrahlt werden. Ferner wird ein allgemeiner Ausdruck für Streuprozesse aufgestellt, bei denen mehrere Lichtquanten umgesetzt werden.

O. Klein (Stockholm).

## Klassische Optik.

**Tilton, L. W.:** Permissible curvature of prism surfaces and inaccuracy of collimation in precise minimum-deviation refractometry. *U. S. Bureau Standards J. Res.* 11, 25 bis 57 (1933).

**Dargenton, André:** Note sur une propriété de la réfraction des pinceaux de rayons lumineux. Application au calcul de la brillance. *Rev. Optique* 12, 172—178 (1933).

Es handelt sich um den Satz: Durch einen Punkt  $A$  im Dingraume gehe ein dünnes Bündel vom räumlichen Winkel  $\omega$ , der Hauptstrahl gehe im Bildraum durch einen Punkt  $A'$ , dort schneide das Bündel auf einer zum Hauptstrahl senkrechten Fläche ein Flächenstück  $\sigma'$  aus. Durch  $A'$  lege man ein dünnes Bündel vom Winkel  $\omega'$  um den nämlichen Hauptstrahl, dies schneide in  $A$  auf einer senkrechten Fläche ein Stückchen  $\sigma$  aus. Dann besteht die Beziehung:

$$n^2 \omega \sigma = n'^2 \omega' \sigma'.$$

Dargenton leitet die Gleichung aus den allgemeinen Formeln für die Brechung eines astigmatischen Strahlenbündels ab. Die Gleichung ist als Straubelscher Satz bekannt, R. Straubel hat sie 1902 aus energetischen Betrachtungen von Clausius erhalten, über ihre Geschichte vgl. auch M. Herzberger, *Z. Instrumentenkde* 48, 533 (1928).

Hans Boegehold (Jena).

**Landsberg, Gr.:** La diffusion de la lumière, phénomène de modulation. *Scientia* 54, 159—170 (1933).

**Herzberger, M.:** Zur Optik inhomogener Mittel. *Z. Instrumentenkde* 53, 436—443 (1933).

1. Die Bahnen der Lichtstrahlen. Der Verf. nimmt ein inhomogenes, aber isotropes Mittel an. Sowohl aus dem Fermatschen Satz, wie aus der Snellschen Form des Brechungsgesetzes leitet der Verf. für die Bahn eines Lichtstrahls die Differentialgleichung ab:  $\ddot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{l}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$ . Hier ist  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor, die Punkte über den Buchstaben drücken die Differentiation nach der Bogenlänge aus ( $\dot{\mathbf{r}}$  ist also Einheitsvektor in der Richtung der Tangente). Vektorielle Multiplikation ist durch das Zeichen  $\times$ , skalare durch den Punkt ausgedrückt.  $\mathbf{l}$  (als Leitvektor bezeichnet) ist bestimmt durch:  $\mathbf{l} = \text{grad } \ln(n)$ ; der Winkel  $i$  eines Strahls mit dem Leitvektor wird Leitwinkel genannt. Es folgen noch die Gleichungen  $\mathbf{l} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{n}/n$ ; und für die Krümmung und Windung eines Lichtstrahls

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\ddot{\mathbf{r}}^2} = \sqrt{(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l})^2}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{\ddot{\mathbf{r}}^2} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l})^2},$$

wo

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \ddot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}).$$

Aus der Gleichung für  $\varrho$  folgt  $1/\varrho = |\mathbf{l}| \sin i$ . (Die Krümmung der durch einen festen Punkt gehenden Lichtstrahlen ist dem Sinus des Leitwinkels proportional.) — Herz-



berger zeigt, daß die Lichtstrahlen nur dann sämtlich Gerade sind, wenn das Mittel homogen ist. Sie sind sämtlich eben ( $1/\tau \equiv 0$ ), wenn  $(\dot{x} \times \dot{l}) = \alpha (\dot{x} \times l)$  ( $\alpha$  Funktion von  $x$  und  $\dot{x}$ ); in diesem Fall kann ein erstes Integral abgeleitet werden  $\frac{d}{ds} \alpha (\dot{x} \times l) = 0$  ( $\alpha$  Funktion von  $x$ ). Ist  $\alpha$  eine Konstante, so sind alle Bahnen Kreise. — H. behandelt sodann die Fälle paralleler und zentrischer Schichtung. Die Lichtstrahlen verlaufen eben, alle diese Ebenen enthalten im ersten Falle die Schichtnormale, im zweiten den Mittelpunkt. Weiter ist im ersten Falle  $n \sin i$ , im zweiten  $nr \sin i$  als erstes Integral konstant ( $r$  Abstand vom Mittelpunkt). Wenn in einem parallel geschichteten Mittel  $x$  die Bahnen Kreise sein sollen, so muß das Gesetz der Schichtung durch  $n = C/z$  auszudrücken sein. Für  $z = 0$  wird  $n = \infty$ , in dieser Unstetigkeitsebene liegen die Kreismittelpunkte. Für zentrisch geschichtete Mittel erhält H. zwei Möglichkeiten für Kreisbahnen, die eine ist das Maxwellsche Fischeuge.

Hans Boegehold (Jena).

Scherzer, O.: Zur Theorie der elektronenoptischen Linsenfehler. Z. Physik 80, 193—202 (1933).

Der Verf. leitet unter der Voraussetzung bekannten Potentialverlaufes des die elektrische Linse darstellenden rotationssymmetrischen elektrischen Feldes eine Formel für die zweite Näherung der Brennweite ab und zeigt, daß der nach der ersten Näherung erhaltene Wert der Brennweite durch die zweite Näherung auf zwei Drittel des Wertes reduziert wird, während ihn die höheren Näherungen nur unwesentlich verändern. Ferner gibt der Verf. den Gedankengang für die Behandlung der Abbildungsfehler und betrachtet speziell als Beispiel die sphärische Aberration achsenparallel einfallender Strahlen. Endlich behandelt der Verf. noch die Frage nach der für die praktische Verwirklichung des zugrunde gelegten elektrischen Feldes zu wählenden Elektrodenform. Ist der Potentialverlauf längs der Achse durch  $\varphi(z)$  gegeben, so gilt — wie in der Arbeit abgeleitet wird — für den Potentialverlauf im übrigen Raum die Formel

$$\Phi(z, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + ir \sin \alpha) d\alpha$$

Picht (Berlin).

Picht, Johannes: Zur Theorie der Elektronenoptik. Z. techn. Physik 14, 239—241 (1933).

Es wird gezeigt, daß die von Scherzer [Z. Physik 80, 193 (1933); vorst. Referat] angegebene Formel für die Brennweite einer rotationssymmetrischen elektronenoptischen Linse mit der vom Verf. [Ann. Physik (5) 15, 926 (1932); dies. Zbl. 6, 92] angegebenen identisch ist. Weiter werden die höheren Näherungen der Formel für die Brennweite sowie der Formeln für die Lage der Hauptpunkte angegeben. V. Fock.

## Geophysik.

Slichter, L. B.: The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures. Physics 4, 307—322 (1933).

Im Gegensatz zu den üblichen Randwertaufgaben der Potentialtheorie tritt bei der Deutung elektrischer Aufschlußverfahren in der angewandten Geophysik das ungewöhnliche Problem auf, daß das Potential an der Grenzfläche gemessen wird, um die unbekannte räumliche Verteilung der Materialkonstanten, also der Leitfähigkeit zu ermitteln. In der Praxis hat man sich durch Probieren geholfen, indem man das einfachere inverse Problem für angenommene Verteilungen der Leitfähigkeit löst und die daraus errechnete Potentialverteilung mit der beobachteten vergleicht. Hier wird das direkte Problem für folgenden Fall gelöst: Eine Elektrode (kleine Kreisscheibe vom Radius  $a$ ) führt der Erdoberfläche den Strom  $C$  zu. Der Erdboden wird als horizontal gleichförmiger Halbraum angenommen. Eine etwa vorhandene elektrische Anisotropie soll sich darauf beschränken, daß horizontale und vertikale Leitfähigkeit  $\sigma_\varrho$  und  $\sigma_z$  verschiedene Funktionen der Tiefe  $z$  sind. In Zylinderkoordinaten  $\varrho, z$ , mit der



Elektrode als Ursprung, ergibt die verschwindende Stromdivergenz eine separierbare Gleichung für das Potential  $\varphi(\varrho, z) = R(\varrho) Z(z)$ , für  $R(\varrho)$  eine Besselsche Gleichung, für  $Z(z)$  eine Sturmsche Gleichung ( $d/dz$ ) ( $\sigma_z dZ/dz = \lambda^2 \sigma_z Z$ ).  $\lambda$  ist ein von  $\varrho$  und  $z$  unabhängiger Parameter.  $Z_1(z, \lambda)$  sei die im Unendlichen verschwindende Lösung,  $\dot{Z}_1 = dZ/dz$ ; als „Kern“ wird eingeführt  $k(\lambda) = -\lambda Z_1(0, \lambda)/\dot{Z}_1(0, \lambda)$ . Dann ist

$$\varphi(\varrho, 0) = A \cdot \int_0^\infty (\sin \lambda a/\lambda a) \cdot J_0(\lambda \varrho) k(\lambda) d\lambda, \text{ mit } A = C/2\pi \sigma_z(0). \text{ Umkehrung gibt}$$

$$A \cdot (\sin \lambda a/\lambda a) \cdot k(\lambda)/\lambda = \int_0^\infty \varphi(\varrho, 0) \cdot J_0(\lambda \varrho) \varrho d\varrho. \text{ Der Kern } k(\lambda) \text{ läßt sich also aus}$$

dem beobachteten  $\varphi(\varrho, 0)$  berechnen. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Integration der Sturmschen Gleichung unter der Randbedingung  $k(\lambda)$ ; für den isotropen Fall ( $\sigma_e = \sigma_z = \sigma(z)$ ) wird eine von Langer stammende Lösung mitgeteilt, die  $\sigma(z)$  eindeutig aus  $\varphi(\varrho, 0)$  ableitet. — Um die Deutung von Versuchsergebnissen zu erleichtern, wird im 2. Teil das inverse Problem für folgende speziellen  $\sigma(z)$  durchgerechnet:

$$\sigma = Mz^{1-2\nu} (1 + Nz^{2\nu})^2,$$

mit beliebigen Konstanten  $\nu, M, N$ , wobei  $Z_1$  die Besselsche Funktion  $K_\nu(\lambda z)$  enthält; Exponential- und hyperbolische Funktionen; analytische Ausdrücke, die in gewissen Tiefen die Form wechseln; Folge homogener Schichten. Die Wirkung kleiner Änderungen in den Annahmen über  $\sigma(z)$  auf  $\varphi(\varrho, 0)$  wird besprochen. — Das anisotrope Problem wird auf ein äquivalentes isotropes Problem transformiert. *J. Bartels.*

**Prey, Adalbert:** Über die Schweremessungen auf dem Meere. *Naturwiss.* **21**, 713 bis 719 (1933).

**Caloi, Pietro:** Contributo allo studio delle onde  $\bar{P}$ . *Boll. Com. Naz. Ital. Geodes. Geofis.*, II. s. **3**, 25—46 (1933).

The author adapts the method of Galitzin to the calculation of the focal depth of an earthquake occurring in the granitic layer; the velocity of propagation of the pulse  $\bar{P}$  (otherwise called  $Pg$ ) and the variation of velocity with depth are also found. Starting from the equation  $(r \cos e)/v = \text{constant}$ , in which  $r$  is the distance of a point on a seismic ray from the earth's centre,  $e$  is the angle of emergence and  $v$  the velocity at that point, an integral is obtained for the time of transit  $t$ . Within the granitic layer the velocity is assumed to vary according to the law  $v_0^2/v^2 = b + c(r^2/r_0^2)$ , in which  $b$  and  $c$  are constants and the suffix 0 denotes surface values. By integration  $t$  is found, effectively, in terms of  $c, v_0, h$  (the focal depth) and  $\theta$  (the epicentral distance). A sequence of values of  $t$  for known values of  $\theta$  allows  $h, c, v_0$  to be obtained by a least squares solution. — The method is applied to the classic earthquake of 1911, Nov. 16, one of the two South German earthquakes that have been the subject of much study and some controversy. As approximate values Caloi adopts  $h = 50 \text{ km.}$ ,  $v_0 = 5,6 \text{ km./sec}$  and  $v = 5,9 \text{ km./sec.}$  at a depth of 60 km. In choosing these large values for  $h$  and for the extent of the upper layer the author makes no reference to the discussion of this earthquake by H. Jeffreys, nor is a reference given in the bibliography. Seven representative observations were chosen, giving  $h = 52,3 \text{ km.}$ ,  $v_0 = 5,57 \text{ km./sec.}$  A table of values of  $v$  at different depths is given. — Caloi tabulates the time of transit and the angle of emergence of  $\bar{P}$  for 9 different focal depths, and compares his results with those of A. Mohorovičić. *R. Stoney (Leeds).*

**Findeisen, W.:** Ein Beitrag zur Frage der Nebelentstehung. *Ann. Hydrogr.* **61**, 305 bis 311 (1933).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit „Beziehungen zwischen Reibung, Wärmeübergang und Verdunstung“ [Gerlands Beitr. Geophys. **39**, 356—373 (1933); wird untersucht, welche Möglichkeiten der Nebelbildung in einer gesättigtfeuchten Luftmasse vorhanden sind, die sich über kälterer oder wärmerer Unterlage befindet. Unter der Annahme, daß die Luft infolge des Massenaustausches allmählich die



Temperatur der Unterlage erreicht, wird bei turbulenter Reibung im wesentlichen folgende Formel abgeleitet, die durch Figuren und Beispiele näher dargelegt wird:

$$\frac{dW}{d\vartheta} = \left( \frac{(A_D)_{\text{eff}}}{(A_Q)_{\text{eff}}} \cdot \frac{f_\vartheta - f_B}{\vartheta - \vartheta_B} - \frac{df_\vartheta}{d\vartheta} \right) \left( 1 + \frac{(A_D)_{\text{eff}}}{(A_Q)_{\text{eff}}} \cdot \frac{f_\vartheta - f_B}{\vartheta - \vartheta_B} \cdot \frac{D}{\varrho c_p} \right)$$

$\left( \frac{dW}{d\vartheta} \right)$ : mittlere Zunahme der Menge des kondensierten Wassers in der am Austausch beteiligten Luftmasse;  $(A_Q)_{\text{eff}}$  bzw.  $(A_D)_{\text{eff}}$ : effektiver Austausch für Wärmeübergang bzw. Verdunstung oder Kondensation;  $\vartheta, \vartheta_B$ : Temperatur der Luft und der Oberfläche;  $f_\vartheta$  und  $f_B$ : entsprechende absolute Feuchtigkeiten;  $D$ : Verdampfungswärme;  $\varrho$ : Luftdichte;  $c_p$ : spezifische Wärme der Luft.)

Fritz Hänsch (Aachen).

**Ertel, H.: Beweis der Wilh. Schmidtschen konjugierten Potenzformeln für Austausch und Windgeschwindigkeit in den bodennahen Luftschichten.** Meteorol. Z. 50, 386—388 (1933).

**Iwatsuki, Toranosuke: On the theory of „Kernpunkt“-determination in photogrammetry when the inner orientations are known.** Tôhoku Math. J. 37, 236—240 (1933).

Bei zwei photographischen Bildern eines räumlichen Objektes mit unbekannten inneren Orientierungen reichen die Bilder von sieben Punkten aus, um die Kernpunkte als Schnittpunkte zweier kubischer Kurven zu bedingen (Finsterwalder). Hier handelt es sich um die Bestimmung der Kernpunkte bei bekannten inneren Orientierungen, ausgehend von der Projektivität der beiden Kernstrahlenbüschel und den beiden Bildern des absoluten Kreises. Der geometrische Ort der Kernpunkte ergibt sich aus den Bildern von vier eigentlichen Raumpunkten oder aus den Bildern eines unendlichfernen Raumpunktes und zweier eigentlicher Raumpunkte. Die Bilder von drei unendlichfernen Punkten und eines eigentlichen Punktes bestimmen eine Gerade als geometrischen Ort für die Lage der Kernpunkte. Haenzel (Karlsruhe).

**Herrmann, K.: Genauigkeit der polygonometrischen Punktbestimmung mit Berücksichtigung der Polarmethode.** Karlsruhe: Diss. 1932. 49 S. u. Allg. Vermessgs-Nachr. 44 (1932) u. 45 (1933).

Es werden zunächst die grundsätzlichen Unterschiede zwischen den beiden bei den Aufnahmearbeiten der Landmessung verwendeten Verfahren festgestellt: Linien-netzmethode (Benutzung von Meßlatte oder Meßband) und Polarmethode (bei optischer Distanzmessung bevorzugt). Alsdann werden Fehlerformeln für die Koordinaten der Polygonzugpunkte und für die aus den Koordinaten der Zugpunkte errechneten Strecken und Richtungen zusammengestellt. Der Hauptteil der Arbeit behandelt die eigentliche Polarmethode, nämlich die Genauigkeit der Schnittpunkte und der Verbindungsstrecken und Verbindungsrichtungen solcher Schnittpunkte. Die strengen Formeln erweisen sich für die praktische Verwendung als zu umständlich. Es werden daher Gebrauchsformeln aufgestellt und ihre Anwendung auf ein größeres Beispiel mit Aufstellung eines Genauigkeitsvoranschlages gegeben.

Schmehl.

**Tienstra, J. M.: Nets of triangles consisting of points with circular error-curves.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 36, 656—665 (1933).

Es werden einige bemerkenswerte Eigenschaften über solche Dreiecksnetze besprochen und abgeleitet, in denen die Winkel nicht stumpf sind und die Genauigkeit, mit der die Dreieckspunkte gemessen sind, durch Fehlerkreise charakterisiert ist. Läßt man den Einfluß der fehlerhaften Basismessung auf die trigonometrische Punktbestimmung außer Acht, so gilt insbesondere der wichtige Satz: Sind die Winkel jedes einzelnen Dreiecks in dem Netz mit Gewichten gemessen, die in jedem Dreieck den Kotangenten der Winkel proportional sind, so nehmen die Fehlerellipsen der Dreieckspunkte Kreisform an. Der Beweis wird mittels Einführung komplexer Größen geliefert.

Schmehl (Potsdam).